Phys. Inst.

Oberlin College Library, Not to be Drawn


# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19. 1. Oktober 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 21 am 11. Oktober 1917.


INHALT:


**Originalmitteilungen:**
E. Schrödinger, Zur Akustik der Atmosphäre. S. 445.
R. Malmström, Zur Theorie der Elektrodynamik. S. 454.
G. Helm, Die Ätherhypothese. S. 456.

**Zusammenfassende Bearbeitungen:**
E. Wagner, Über Röntgenspektroskopie. (Fortsetzung.) S. 461.

**Besprechungen:**
Handbuch der Radiologie. IV. S. 466.
Prace matematyczno-fizyczne. XXV. S. 467.
W. K. Clifford, Der Sinn der exakten Wissenschaft. S. 468.
H. v. Helmholtz, Zwei Vorträge über Goethe. S. 468.

**Personalien.** S. 468.


## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Zur Akustik der Atmosphäre.


Von E. Schrödinger.

(Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien.)


§ 1. Einleitung.

Zur Erklärung der äußeren Zone sogen. abnormaler Hörbarkeit, welche nun schon bei sehr vielen Explosionskatastrophen (Vulkanausbrüchen, Bombardements von ungewöhnlicher Stärke) regelmäßig beobachtet wurde[1]), hat Herr v. d. Borne angenommen, daß in diesem Gebiet Schallstrahlen die Erde wieder erreichen, welche in 70 bis 100 km Höhe, in dem Übergangsgebiet zwischen der Stickstoff-Sauerstoff- und der Wasserstoffsphäre, wo ein kräftiger, aufwärts gerichteter Gradient der Schallgeschwindigkeit bestehen muß, allmählich umgebogen und wieder zur Erde zurückgeleitet würden. Gegen diese Erklärung sind verschiedene Bedenken geltend gemacht worden[3]), welche jedoch alle verhältnismäßig geringfügig erscheinen gegenüber einem Einwand energetischer Natur, den Herr Wilhelm Schmidt-Wien[4]) gegen die Theorie erhoben hat und der, wenn er stichhaltig wäre, die Annahme, daß Schallstrahlen noch mit wahrnehmbarer Intensität aus solcher Höhe zurückkehren können, ein für allemal außer Diskussion setzen würde.

Der genannte Einwand des Herrn W. Schmidt gründet sich darauf, daß eine Schallwelle, welche in so große Höhen vordringt, ganz abgesehen von der Intensitätsabnahme nach dem Entfernungsquadratgesetz und durch Dämpfung, auch noch eine bedeutende Schwächung entsprechend dem Dichteverhältnis der Luft (in der Höhe und am Erdboden) erfahren müsse. Denn in einer ebenen Welle könne die Amplitude doch jedenfalls nicht zunehmen, sondern höchstens — bei vollständig fehlender Dämpfung — konstant bleiben. Dann nimmt aber die Energie oder, was dasselbe ist, die Intensität des Schallstrahls proportional mit der Dichte ab. Bei einer Kugelwelle wird sich diese Intensitätsabnahme nach dem Dichteverhältnis der Intensitätsabnahme nach dem Entfernungsquadratgesetz überlagern.

Herr Schmidt nimmt konsequenterweise an, daß bei der Rückkehr der Schallwelle von ihrem Kulminationspunkt zum Erdboden nach dem Reziprozitätsgesetz noch einmal eine solche „abnormale" Schwächung im Verhältnis der Dichten eintritt. Die Endintensität erscheint demnach gegenüber einer Welle, die in homogener Luft die gleiche Strecke zurückgelegt hätte, mit dem Quadrat des Verhältnisses

$$\frac{\text{Luftdichte im Kulminationspunkt}}{\text{Luftdichte am Erdboden}}$$

multipliziert.

Da nun dieser Quotient für die großen Höhen, die hier in Betracht kommen (mindestens 50 km), schon einen verschwindend kleinen Wert hat, so ist klar — und Herr Schmidt hat das durch Zahlenbeispiele belegt —, daß der von oben zurückkehrende Schallstrahl eine viel zu geringe Intensität hätte, um noch mit dem Ohr oder sonst in irgendeiner Weise wahrgenommen werden zu können.

Es erhebt sich nun aber die Frage, was denn mit der Energie geschieht, die eine, sagen wir ebene Schallwelle beim Fortschreiten in höhere, dünnere Schichten der Atmosphäre verliert. Im ersten Augenblick könnte man an innere Reflexionen oder dgl. denken, da die wirkliche Atmosphäre ja wegen der Veränderlichkeit der Temperatur mit der Höhe akustisch inhomogen ist. Aber die dargelegte Schlußweise steht mit der Veränderlichkeit der Temperatur in gar

1) Siehe z. B. E. van Everdingen, Proc. Amsterdam **18**, Nr. 6, 933, 1915.
2) G. v. d. Borne, Über die Schallverbreitung bei Explosionskatastrophen, diese Zeitschr. **11**, 483, 1910.
3) Fr. Nölke, diese Zeitschr. **17**, 31, 283, 1916.
4) W. Schmidt, diese Zeitschr. **17**, 333, 1916; auch Meteorolog. Zeitschr. **32**, 266, 1915 u. **33**, 314, 1916; ferner ebendort **34**, 134, 1917.

keinem Zusammenhang, sondern überträgt sich unverändert auf eine ideale isotherme Atmosphäre. Eine solche ist trotz der großen Veränderlichkeit der Dichte nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch akustisch homogen. Denn die Schallgeschwindigkeit ist bei konstanter Temperatur vom Druck bzw. von der Dichte unabhängig, und hat daher in jedem Punkte einer isothermen Atmosphäre denselben Wert. Da wir in einem akustisch homogenen Mittel innere Reflexionen so wenig voraussetzen dürfen, wie Brechung, bleibt der Verbleib der verloren gegangenen Energie völlig unaufgeklärt.

Durch folgerichtige Anwendung allgemein wellentheoretischer Grundsätze auf den Vorgang der Schallbewegung in der Atmosphäre sind wir also in einen unlösbaren Widerspruch gegen das Energieprinzip verwickelt worden. Da nun das letztere immer richtig sein muß, kommen wir zu dem Schlusse, daß offenbar die ersteren — nämlich die allgemein wellentheoretischen Grundsätze — auf unseren Fall nicht anwendbar sind. Das heißt aber gar nichts anderes, als daß die Schallbewegung, selbst in einer isothermen Atmosphäre, nicht durch die Wellengleichung beherrscht wird:

$$v^2 \Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

($f$ eine der Größen, welche den Zustand in irgendeinem Punkte des Mediums bestimmen), sondern durch etwas andere Gleichungen, die sich durch Anwendung der allgemeinen hydrodynamischen Prinzipien auf den vorliegenden Fall müssen ableiten lassen. Dies soll in den folgenden Zeilen geschehen. Wir können vorwegnehmen, daß sich zugleich mit der Lösung des oben bezeichneten energetischen Widerspruchs der Einwand des Herrn W. Schmidt gegen die Theorie des Herrn v. d. Borne als hinfällig erweisen wird. — Im letzten Abschnitt (§ 5) wird dann die tatsächliche Dämpfung durch Wärmeleitung und innere Reibung berechnet. Wegen der angenähert exponentiellen Zunahme der Temperaturleitfähigkeit und des Verhältnisses der Reibung zur Dichte mit wachsender Höhe ergibt sich eine so bedeutende Zunahme der Dämpfung, daß hierdurch die Theorie des Herrn v. d. Borne in der Tat ziemlich unwahrscheinlich gemacht wird.

## § 2. Ebene Vertikalwellen.

Wir denken uns eine, im Gleichgewicht isotherme, Atmosphäre, in welcher Druck und Dichte nach der gewöhnlichen barometrischen Höhenformel verteilt sind. Wir betrachten zunächst nur solche kleine Schwingungen in dieser Atmosphäre, bei welchen in jedem Punkte eines beliebigen Horizontalschnittes der gleiche Bewegungszustand herrscht und überhaupt nur Bewegungen in vertikaler Richtung vorkommen. Wir können demnach alle Überlegungen an einer (gedachten) vertikalen Röhre mit dem Querschnitt 1 durchführen. Die Variablen wählen wir aus später zu erwähnenden Gründen nicht in Eulerscher, sondern in Lagrangescher Art. Wir bezeichnen also mit $x$ die Höhe über dem Erdboden eines individuellen, materiellen Querschnitts im Ruhezustand, mit $y$ die Höhe desselben materiellen Querschnitts zu irgendeiner Zeit $t$. $y$ ist also eine Funktion von $x$ und $t$, die an dem materiellen Volumelement haftet. Ebenso denken wir den Druck $p$ und die Dichte $\varrho$ als Funktionen von $x$ und $t$ an dem materiellen Volumelement haftend. Es stellt also z. B. $\varrho(x,t)$ nicht die Dichte zur Zeit $t$ in der Höhe $x$ über dem Erdboden dar, sondern die Dichte, die jenes materielle Volumelement zur Zeit $t$ besitzt, welches im Ruhezustand die Höhe $x$ hat; oder auch die Dichte zur Zeit $t$ in der Höhe $y(x,t)$ über dem Erdboden. Im Ruhezustand, wenn keine Störung vorhanden ist, sei

$$\varrho(x,t) = \varrho_0 e^{-\alpha x} = \bar{\varrho}, \quad p(x,t) = p_0 e^{-\alpha x} = \bar{p} \qquad (2)$$

Es bedeuten also $\varrho_0$ und $p_0$ die störungsfreien Werte dieser Größen am Erdboden, $\alpha$ die Barometerkonstante. Bekanntlich ist

$$\alpha = \frac{g \varrho_0}{p_0}. \qquad (3)$$

Während zwischen $p_0$, $\varrho_0$, $\bar{p}$, $\bar{\varrho}$ die isotherme Beziehung besteht

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}} = \frac{p_0}{\varrho_0}, \qquad (4)$$

erfolgen die Zustandsänderungen in der Schallwelle natürlich adiabatisch. Es muß also im Verlaufe der Bewegung

$$\frac{p}{\varrho^\varkappa} = \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}^\varkappa}, \quad p = \left(\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\right)^\varkappa \bar{p}, \qquad (5)$$

wo $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen[1]).

Betrachten wir nun das scheibenförmige Volumelement, das sich im Ruhezustand mit der Dichte $\bar{\varrho}$ zwischen $x$ und $x+dx$ befand, also die Dicke $dx$ hatte. Zu irgendeiner Zeit, im Verlaufe der Bewegung, erstreckt sich dasselbe von $y$ bis

1) Die Beziehung (5) ist richtig, weil die Funktionen am materiellen Volumelement haften. Bei Eulerscher Wahl der unabhängigen Veränderlichen, d. h. für einen im Raum festen Querschnitt, gilt sie nicht, da ein solcher im Laufe der Bewegung von materiellen Volumelementen passiert wird, die aus verschiedenen Höhen stammen, deren Zustände also nicht auf rein adiabatischem Wege ineinander übergeführt werden können.

$$y + \frac{\partial y}{\partial x} dx,$$

hat also die Dicke $\frac{\partial y}{\partial x} dx$. Also muß

$$\varrho\, dx = \varrho \frac{\partial y}{\partial x} dx, \quad \frac{\varrho}{\varrho} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Ferner hat dieses Volumelement die Masse $\bar{\varrho} dx$ und die aufwärts gerichtete Beschleunigung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Es wirkt darauf die Kraft $p$ nach aufwärts und

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \bar{\varrho} g\, dx$$

nach abwärts, in Summa also nach aufwärts

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx - \bar{\varrho} g\, dx.$$

Daher lautet die Bewegungsgleichung

$$\bar{\varrho} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = -\frac{\partial p}{\partial x} dx - \bar{\varrho} g\, dx$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial p}{\partial x} - g. \tag{7}$$

Setzen wir nun in die rechte Seite der Gleichung (5) für $p$ und $\frac{\varrho}{\bar{\varrho}}$ ihre Werte aus (2) und (6) ein, so finden wir

$$\begin{aligned} p &= p_0 e^{-\alpha x} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\alpha p_0 e^{-\alpha x} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa} - \\ &\quad - \varkappa p_0 e^{-\alpha x} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Führen wir noch die Bezeichnung $v$ ein für die Schallgeschwindigkeit in homogener Luft von derselben Temperatur, also

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa p_0}{\varrho_0}}, \tag{9}$$

so erhalten wir durch Einsetzen von (8) in die Bewegungsgleichung (7) unter Rücksicht auf den Wert von $\varrho$ nach (2), ferner auf (3) und (9):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g\left[1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\varkappa}\right] = 0 \tag{10}$$

als exakte partielle Differentialgleichung unseres Problems[1]).

Wir führen jetzt die Annahme ein, daß es sich um kleine Schwingungen handelt, so daß wir setzen können

$$y(x, t) = x + \eta(x, t), \tag{11}$$

wo $\eta$, die Elongation, eine kleine Größe ist, deren Quadrate und höhere Potenzen wir vernachlässigen[1]). Mit dieser Annäherung finden wir leicht aus (10) die Differentialgleichung für $\eta$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g\varkappa \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

die wir mit Rücksicht auf (3) und (9) und bei etwas geänderter Anordnung der Terme auch schreiben können

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0. \tag{12a}$$

Man sieht sofort, daß eine Lösung dieser Gleichung gegeben ist durch den reellen Teil von

$$e^{i\nu t + \mu x},$$

wo $\nu$ beliebig, reell, $\mu$ aber eine Wurzel der Gleichung:

$$\mu^2 - \alpha\mu + \frac{\nu^2}{v^2} = 0. \tag{13}$$

Es ist also

$$\mu = \frac{\alpha}{2} + \frac{i\nu}{v}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 v^2}{4\nu^2}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{i\nu}{c(\nu)},$$

wobei gesetzt ist

$$c(\nu) = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 v^2}{4\nu^2}}}. \tag{14}$$

Eine Lösung von (12a) lautet also in reeller Form z. B.

$$\eta = A e^{\frac{\alpha x}{2}} \cos\nu\left(t + \frac{x}{c(\nu)}\right), \tag{15}$$

wobei $A$ eine beliebige reelle Konstante und die Funktion $c(\nu)$ durch (14) gegeben ist. In Worten heißt das:

In einer ebenen, einfach harmonischen Welle, die in einer isothermen Atmosphäre vertikal aufwärts oder abwärts fortschreitet, nimmt die Amplitude im umgekehrten Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Dichten zu bzw. ab. Hierdurch wird die Konstanz der Energie gewahrt[2]). Außerdem findet Dispersion statt. Nur sehr hochfrequente, d. h. kurze Wellen haben die normale Schallgeschwindigkeit, längere Wellen pflanzen sich rascher fort.

1) S. a. Rayleigh, The theory of sound, 2. Aufl. Bd. 2, S. 31, Gleichung (4), mit welcher unsere Gleichung (10) bis auf das 3. Glied, welches den Einfluß des Schwerefeldes darstellt, genau übereinstimmt.

1) Wir können uns mit dieser laxen Ausdrucksweise begnügen, da in dieser Beziehung ganz dieselben Verhältnisse vorliegen, die aus der Akustik homogener Medien hinreichend bekannt sind.

2) Man vergleiche hierzu auch die treffenden Ausführungen A. Wegeners, Meteorolog. Zeitschr. **33**, 523, 1916.

Um die Größe der Dispersion zu beurteilen, schreiben wir (14) in der Form:

$$\frac{c(\nu)^2}{v^2} = 1 + \frac{\alpha^2 c(\nu)^2}{4\nu^2} \qquad (14a)$$

und beachten, daß erstens

$$\frac{\nu}{c(\nu)} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ist, wenn $\lambda$ die Wellenlänge bedeutet, und daß zweitens $\frac{1}{\alpha} = H$, der sogenannten virtuellen Höhe der homogenen Atmosphäre, bekanntlich rund 8 km. Wir haben dann

$$\frac{c(\nu)^2}{v^2} = 1 + \frac{1}{16\pi^2}\frac{\lambda^2}{H^2} \qquad (14b)$$

oder angenähert

$$c(\nu) = v\left(1 + \frac{1}{32\pi^2}\frac{\lambda^2}{H^2}\right). \qquad (14c)$$

Die Dispersion würde also selbst für Wellen von 8 km Länge erst etwa 3 Promille betragen und ist für akustische Wellen absolut zu vernachlässigen und ohne jedes Interesse.

Dieser Umstand ermöglicht uns, mit einer für akustische Zwecke weitaus hinreichenden Genauigkeit die allgemeine Lösung der Gleichung (12a) anzugeben. Wenn wir uns auf Wellen beschränken, deren Länge klein ist gegen $H = \frac{1}{\alpha}$, dürfen wir auf der linken Seite von (12a) das Glied $\frac{\alpha^2}{4}\eta$ addieren, denn diese Größe ist gegenüber den Hauptgliedern von der Größenordnung $\frac{\lambda^2}{H^2}$[1]). Die Gleichung

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\alpha^2}{4}\eta = 0 \qquad (12b)$$

hat aber, wie man leicht durch Ausrechnen bestätigt, die allgemeinen Lösungen

$$\eta = e^{\frac{\alpha x}{2}} f\left(t \pm \frac{x}{v}\right). \qquad (16)$$

$f$ ist eine beliebige Funktion; das untere Vorzeichen liefert eine nach aufwärts, das obere eine nach abwärts fortschreitende Welle von beliebiger Gestalt.

Der Einfluß des Schwerefeldes äußert sich also auch bei einer Welle von beliebiger Gestalt im wesentlichen nur darin, daß die Schwingungsweite beim Fortschreiten im umgekehrten Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Dichten abnimmt bzw. zunimmt. Dasselbe gilt für die Größe der relativen Dichteabweichung, während sich die absolute Dichteabweichung direkt proportional mit der Wurzel aus der Dichte ändert. Setzen wir nämlich in (6)

$$\varrho = \bar{\varrho}(1 + \sigma), \qquad (17)$$

so finden wir für die relative Dichteabweichung $\sigma$ unter Rücksicht auf (11) und (16):

$$\sigma = -\frac{\partial\eta}{\partial x} = e^{\frac{\alpha x}{2}}\left(\mp\frac{1}{c}f' - \frac{\alpha}{2}f\right). \qquad (18)$$

Die absolute Dichteabweichung hat, mit Rücksicht auf (2), den Wert

$$\bar{\varrho}\sigma = \varrho_0 e^{-\frac{\alpha x}{2}}\left(\mp\frac{1}{c}f' - \frac{\alpha}{2}f\right). \qquad (18a)$$

Der Umstand, daß in diesen Ausdrücken neben der Derivierten $f'$ auch noch $f$ selbst auftritt — allerdings nur mit einem Koeffizienten von der relativen Größenordnung $\frac{\lambda}{H}$ — hat beispielsweise bei einer einfach harmonischen Welle zur Folge, daß die Extremwerte der Dichte an irgendeiner Stelle nicht, wie in einem homogenen Mittel, genau in dem Zeitpunkt eintreten, in welchem das betreffende Luftteilchen die Ruhelage passiert, sondern etwas früher oder später, je nachdem die Welle aufwärts oder abwärts fortschreitet. Praktisch ist diese geringe Phasenverschiebung natürlich ebenso belanglos wie die Dispersion, obwohl sie, im Gegensatz zu dieser, einen Effekt erster Ordnung in $\frac{\lambda}{H}$ bildet.

## § 3. Beliebige Wellenbewegung.

Bei der Behandlung des allgemeinen Falles einer beliebigen dreidimensionalen Wellenbewegung in einer isothermen Atmosphäre dürfen wir uns jetzt wohl etwas kürzer fassen. Bezeichnet man die Ruhekoordinaten eines Luftteilchens mit $x$, $y$, $z$ ($x$-Achse vertikal aufwärts), seine Koordinaten zur Zeit $t$ mit

$$x + \xi(x, y, z, t),\ y + \eta(x, y, z, t),\ z + \zeta(x, y, z, t),$$

ferner mit

$$\sigma(x, y, z, t)$$

die relative Dichteänderung in der Umgebung des Teilchens gegenüber dem Ruhezustand, so erhält man, wenn man die Größen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und $\sigma$ als klein ansieht, zu ihrer Bestimmung folgendes Gleichungssystem:

---

1) Das erste und dritte Glied in (12a) ist von der Größenordnung $\frac{\eta}{\lambda^2}$, das Schwereglied von der Ordnung $\frac{\eta}{H\lambda}$. Das hinzugefügte Glied — $\frac{\eta}{4H^2}$ — ist also auch gegen das Schwereglied klein wie $\lambda$ gegen $H$, gegen das Hauptglied wie $\lambda^2$ gegen $H^2$.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\sigma}{\partial x} - \frac{\alpha}{\varkappa}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\alpha(\varkappa-1)}{\varkappa}\sigma \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\sigma}{\partial y} - \frac{\alpha}{\varkappa}\frac{\partial\xi}{\partial y} \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\sigma}{\partial z} - \frac{\alpha}{\varkappa}\frac{\partial\xi}{\partial z} \\
\sigma &= -\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right| \qquad (19)$$

Von den gewöhnlichen hydrodynamischen Grundgleichungen in Lagrangescher Form (unter Annahme kleiner Schwingungen) unterscheidet sich dieses System nur durch die mit $\alpha = \frac{\varkappa g}{v^2}$ multiplizierten Terme, diese stellen demnach den Einfluß des Schwerefeldes und der durch dasselbe bedingten ungleichförmigen Dichteverteilung dar[1]).

Zur Vereinfachung der Rechnung wollen wir jetzt von vornherein darauf verzichten, die im Spezialfall des § 2 ausführlich erörterte und als akustisch völlig belanglos erwiesene Dispersion auch hier im allgemeinen Fall wiederzufinden. Darum sollen von Haus aus Größen von der Ordnung $\frac{\lambda^2}{H^2}$, d. i. $\alpha^2\lambda^2$, gegen 1 konsequent vernachlässigt werden. Dabei ist zu beachten, daß wir z. B. $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ als von der Größenordnung $\frac{\xi}{\lambda}$, $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ als von der Ordnung $\frac{\xi}{\tau} = \frac{v\xi}{\lambda}$ ($\tau$ = Schwingungsdauer) anzusehen haben und daß diese Überlegung für Wellen von beliebiger Form richtig bleibt, welche nur keine langwelligen Komponenten von der Größenordnung $H$ enthalten.

Wir werden nun nach Analogie mit dem eindimensionalen Spezialfall vermuten, daß sich in diesem Grade der Annäherung auch die Lösungen des Systems (19) von gewöhnlichen Wellenpotentialen nur durch den Faktor $e^{\frac{\alpha x}{2}}$ unterscheiden, mithin die Gestalt haben:

$$e^{\frac{\alpha x}{2}} f\left(t - \frac{ax+by+cz}{v}\right), \qquad (20)$$

wobei

$$a^2+b^2+c^2 = 1, \qquad (21)$$

und $a$, $b$, $c$ die Richtungskosinus der Fortschreitungsrichtung der durch (20) dargestellten ebenen Welle sind. Um die diversen Funktionen $f$, oder vielmehr ihre wechselseitige Verknüpfung zu finden, führen wir in (19) die Transformation aus:

$$\xi = e^{\frac{\alpha x}{2}}\mathfrak{x},\quad \eta = e^{\frac{\alpha x}{2}}\mathfrak{y},\quad \zeta = e^{\frac{\alpha x}{2}}\mathfrak{z}. \qquad (22)$$

Zunächst liefert die letzte der Gleichungen (19):

$$\sigma = e^{\frac{\alpha x}{2}}\left(\mathfrak{f} - \frac{\alpha}{2}\mathfrak{x}\right), \qquad (23)$$

wobei wir der Konformität wegen zur Abkürzung gesetzt haben:

$$\mathfrak{f} = -\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\right). \qquad (24)$$

Dann erhalten wir aus (19) folgendes mit (19) sehr ähnlich gebaute Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{f}$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial x} - \beta\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} - \beta\mathfrak{f} \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial y} - \beta\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} \\
\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{z}} - \beta\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z} \\
\mathfrak{f} &= -\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right| \qquad (19a)$$

$\beta$ ist eine Abkürzung für

$$\beta = \frac{\alpha(2-\varkappa)}{2\varkappa}, \qquad (25)$$

also, gleich $\alpha$, von der Größenordnung $\frac{1}{H}$.

Die Lösungen von (19a) sind nun in der Tat gewöhnliche Wellenpotentiale. Die Schwereglieder, die in dem System noch auftreten, verändern nur die linearen Beziehungen zwischen den vier Wellenpotentialen, die man für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{f}$ anzusetzen hat. Man überzeugt sich leicht, daß folgender übersichtliche Ansatz dem System Genüge leistet:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= ag' - v\beta(1-a^2)g \\
\mathfrak{y} &= bg' + v\beta ab\,g \\
\mathfrak{z} &= cg' + v\beta ac\,g \\
\mathfrak{f} &= \frac{1}{v}g'' \\
a^2+b^2+c^2 &= 1.
\end{aligned}\right| \qquad (26)$$

Dabei ist $g$ eine beliebige Funktion des einen Arguments $\left(t - \frac{ax+by+cz}{v}\right)$, die Striche bedeuten

1) Bemerkenswert ist, daß durch die Gleichungen (19) das Helmholtzsche Wirbeltheorem verletzt wird. Differenziert man die erste Gleichung nach $y$, die zweite nach $x$, und subtrahiert, so kommt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right] = -\frac{\alpha v^2(\varkappa-1)}{\varkappa}\frac{\partial\sigma}{\partial y},$$

also im allgemeinen $\neq 0$. Dasselbe gilt für die $y$-Komponente, während die $x$-Komponente des Wirbels von der Zeit unabhängig ist. — Diese Verletzung des Wirbeltheorems ist offenbar durch die — vom mathematischen Standpunkt inkonsequente — Verwendung zweier verschiedener Zustandsgleichungen verschuldet. In der Tat verschwinden alle Zeitderivierten der Wirbelkomponenten, wenn man die adiabatische Zustandsgleichung mit der isothermen zur Koinzidenz bringt, indem man $\varkappa = 1$ macht.

deuten die Ableitungen nach dem Argument. Die Gleichungen (22) und (23) vermitteln den Übergang zu den physikalischen Größen $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\sigma$ und man sieht, daß sich unsere in (20) und (21) ausgedrückte Vermutung in der Tat bewahrheitet hat.

Der Vektor $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ liefert, abgesehen von der Zunahme der Schwingungsweite mit der Höhe, ein zutreffendes Bild von der Bewegung des Mediums. Er unterscheidet sich von dem Verschiebungsvektor der entsprechenden Lösung in einem homogenen Medium nur durch die kleinen, mit $\beta$ behafteten Zusatzterme. Diese bewirken, daß sich $\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z}$ nicht genau wie $a : b : c$ verhalten. Der Verschiebungsvektor steht also in unserem Falle nicht genau senkrecht auf der Wellenebene. Da gleichwohl $\mathfrak{y} : \mathfrak{z} = b : c$, liegt er jedenfalls in der Vertikalebene durch die Wellennormale, was schon aus Symmetriegründen gefordert werden muß. Die Schwingung findet also in der genannten Vertikalebene statt, aber nicht in der Richtung der Wellennormale. Man überzeugt sich leicht, daß sie im allgemeinen überhaupt nicht geradlinig erfolgt, sondern daß jedes Teilchen in jener Ebene eine Kurve beschreibt. Die Bahnen der verschiedenen Teilchen sind in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausgedrückt kongruent, in Wahrheit also, mit Rücksicht auf (22), ähnlich.

Wir wollen beispielsweise setzen:

$$g(u) = A \sin \frac{2\pi v}{\lambda} u , \qquad (27)$$

d. h. wir betrachten eine rein harmonische Welle von der Wellenlänge $\lambda$. Die $x$, $y$-Ebene drehen wir parallel zur Wellennormale, so daß

$$c = 0, \quad \mathfrak{z} = 0$$

wird, und

$$a = \cos\vartheta \qquad b = \sin\vartheta$$

gesetzt werden kann. $\vartheta$ ist der Winkel der positiven Wellennormale mit der Vertikalen und variiert von 0 bis $\pi$. Die ersten beiden Gleichungen (26) liefern dann:

$$\mathfrak{x} = \frac{2\pi vA}{\lambda} \cos\vartheta \cos\omega - vA\beta \sin^2\vartheta \sin\omega \qquad (28)$$

$$\mathfrak{y} = \frac{2\pi vA}{\lambda} \sin\vartheta \cos\omega + vA\beta \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\omega .$$

Hier ist zur Kürze $\omega$ für

$$\frac{2\pi v}{\lambda}\left(t - \frac{ax + by + cz}{v}\right)$$

geschrieben. Durch Elimination von $\omega$ erhält man die Bahnkurve eines beliebigen Teilchens in der Form

$$1 = \frac{(\mathfrak{x}\cos\vartheta + \mathfrak{y}\sin\vartheta)^2}{\left(\frac{2\pi vA}{\lambda}\right)^2} + \frac{(\mathfrak{x}\sin\vartheta - \mathfrak{y}\cos\vartheta)^2}{(vA\beta\sin\vartheta)^2} . \qquad (29)$$

Die linearen Ausdrücke, deren Quadrate hier im Zähler stehen, sind genau die $x$- bzw. $y$-Komponente des Vektors ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$), bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen $x$-Achse mit der Wellennormale zusammenfällt, während die $y$-Achse in der Vertikalebene durch die Wellennormale liegt. Die Bahnkurve ist also eine Ellipse mit der großen und kleinen Halbachse

$$\frac{2\pi vA}{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad vA\beta\sin\vartheta . \qquad (30)$$

Sie liegt in der genannten Vertikalebene, ihre große Achse fällt mit der Wellennormale zusammen. Für das Achsenverhältnis findet man unter Rücksicht auf (25) und darauf, daß $\frac{1}{G} = H$ ist:

$$\frac{2-\varkappa}{4\pi\varkappa} \cdot \frac{\lambda}{H} \cdot \sin\vartheta . \qquad (31)$$

Die Ellipsen sind also äußerst lang gestreckt, beinahe schon in doppelt durchlaufene Gerade ausgeartet. Denn das Verhältnis der kleinen zur großen Achse ist nach (31) von der Größenordnung des Verhältnisses: Wellenlänge dividiert durch die virtuelle Höhe der Atmosphäre, ja sogar noch kleiner, da sich für den Zahlenfaktor der Wert 0,034 ergibt. Den größten Wert hat das Achsenverhältnis für $\vartheta = 90^0$, d. i. für horizontale Wellen; mit wachsender (positiver oder negativer) Neigung gegen die Horizontale nimmt es bis zum Wert 0, für vertikale Wellen, ab. — Für den Umlaufsinn der Teilchen in ihren Bahnen ergibt sich aus (28) die Regel, daß er mit dem des Uhrzeigers übereinstimmt für einen Beobachter, der, aufrecht stehend, die Welle von links nach rechts laufen sieht.

Selbstverständlich sind die eben besprochenen minutiösen Besonderheiten der Wellenfortpflanzung praktisch ebenso belanglos wie die im § 2 erwähnte minimale Dispersion und die Phasenverschiebung zwischen Dichte und Bewegung. Für praktische Zwecke können wir in den Ausdrücken (26) die mit $\beta$ multiplizierten Glieder streichen. Von wirklicher Bedeutung ist einzig und allein die Feststellung, daß auch im allgemeinen Fall alle Verschiebungskomponenten die allgemeine Form (20) haben:

$$\frac{\text{Wellenpotential}}{\text{Quadratwurzel a. d. Dichte}} ,$$

so daß die Abnahme der Dichte nach oben hinsichtlich der Energieausbreitung genau kompensiert wird durch die Zunahme der Schwingungsweiten, die Ausbreitung der Energie also genau ebenso vor sich geht, wie in einem homogenen Mittel.

## § 4. Einfluß der Gradienten der Temperatur und chemischen Zusammensetzung.

Streng genommen sind unsere Ergebnisse auf die wirkliche Atmosphäre nicht direkt anwendbar, weil erstens auch im Mittel nicht Isothermie herrscht, sondern in den untersten Schichten sogar ein ziemlich bedeutender Temperaturgradient, und weil zweitens die chemische Zusammensetzung der Luft in großen Höhen merklich variiert. Infolge beider Umstände ist die Schallgeschwindigkeit nicht, wie in einer isothermen, chemisch einheitlichen Atmosphäre, konstant, sondern variiert etwas von Schicht zu Schicht. Die strenge Durchführung der Rechnung unter diesen Annahmen dürfte analytisch ziemlich schwierig sein. Es kann aber wohl kaum einem Zweifel unterliegen, daß an Stelle einer strengen Theorie zur Berechnung des Strahlengangs die allgemein gebräuchliche einfache Methode der „geschichteten Medien" treten kann, die ja auch zur Berechnung der astronomischen Refraktion mit Erfolg angewendet wird. In dieser Weise findet man einerseits die von Herrn Kommerell[1]) eingehend studierte „thermophobe"[2]) Krümmung der Schallstrahlen, anderseits in den Höhen, wo der Wasserstoffgehalt sich bemerkbar zu machen beginnt, die eingangs erwähnte Abwärtskrümmung, die Herr v. d. Borne für das Gebiet abnormaler Hörbarkeit verantwortlich macht. Über die energetischen Verhältnisse gibt freilich die Theorie der geschichteten Medien keinen zuverlässigen Aufschluß. Aber es kann nicht zweifelhaft sein, daß auch in diesen Fällen der Energiestrom in einer Strahlröhre, abgesehen von den später zu behandelnden Dämpfungseinflüssen wenigstens annähernd konstant sein wird, wie wir es für eine isotherme, chemisch einheitliche Atmosphäre nachgewiesen haben. Eine geringe Schwächung ist mit der kontinuierlichen Refraktion allerdings notwendig verbunden, aber sie kann nicht annähernd so groß sein, wie die von Herrn Schmidt l. c. aus dem Dichteverhältnis errechnete Schwächung.

## § 5. Die Dämpfung des Schalles durch Wärmeleitung und innere Reibung.

Nachdem wir so den eingangs erwähnten Widerspruch gelöst haben, müssen wir nun allerdings unsererseits einen Umstand hervorheben, welcher dem Vordringen des Schalles in die höchsten Schichten der Atmosphäre ein Ziel setzt und, wie wir sehen werden, die Theorie v. d. Bornes ziemlich unwahrscheinlich macht.

Bekanntlich ist in Luft vom Atmosphärendruck die Dämpfung des Schalles durch Wärmeleitung und innere Reibung fast ganz zu vernachlässigen, außer für ganz hohe Töne nahe der Hörgrenze[1]) oder für sehr große zurückgelegte Wegstrecken. Aus den von Stokes, Kirchhoff und Rayleigh[2]) angegebenen Formeln für die Dämpfungsexponenten, in Verbindung mit experimentell bestätigten Resultaten der kinetischen Gastheorie über das Verhalten der Temperaturleitfähigkeit und der inneren Reibung der Gase bei Änderung der Dichte, geht nun aber hervor, daß mit fortschreitender Verdünnung die Dämpfung zunimmt und sich allmählich für alle Wellenlängen stark bemerkbar machen muß. Auch hierfür fehlt es nicht ganz an experimentellen Belegen. Die Weichheit weit fortgepflanzter Töne oder Geräusche auf hohen Bergen (Fehlen der scharfen, schrillen Töne), ferner die Schwierigkeit der Verständigung bei Hochballonfahrten, die in der verminderten Luftdichte an und für sich keine hinreichende Erklärung findet, dürften in dieser Weise zu deuten sein. Vom gastheoretischen Standpunkt ist die Sache außerordentlich plausibel. Da die Schallgeschwindigkeit von derselben Größenordnung ist wie die Molekulargeschwindigkeiten, legen die Moleküle ihre freien Wegstrecken in derselben Zeit zurück, die der Schall für dieselbe Strecke braucht. Je mehr also bei fortschreitender Verdünnung die Größenordnung der freien Weglänge sich der Wellenlänge nähert, ein umso erheblicherer Austausch von Molekülen wird schon während der Dauer einer einzigen Schwingung stattfinden: einerseits zwischen den Stellen positiver und negativer Dichte- (und Temperatur-)abweichung, anderseits zwischen den Stellen verschiedener und verschieden gerichteter Massengeschwindigkeit

1) V. Kommerell, diese Zeitschr. **17**, 172, 1916; s. a. Reynolds, On the refraction of sound by the atmosphere. Phil. Trans. **166**, 315, 1876.

2) Will sagen: konvex nach der Seite der höheren Temperaturen.

1) Es scheint fast, als wäre dieser Umstand für die phylogenetische Einstellung unserer oberen Hörgrenze (etwa 40000 Schwingung. sec) zum mindesten mitbestimmend gewesen. Denn hier ist die Dämpfung auf Wegstrecken, wie sie biologisch hauptsächlich in Betracht kommen, eben noch geringfügig (für 100 m etwa 4 Proz.). Jenseits der Hörgrenze beginnt sie rapide zu wachsen (15 Proz. bzw. 49 Proz. pro 100 m für die beiden nächsthöheren Oktaven).

2) Stokes berücksichtigt innere Reibung und Wärmestrahlung: Cambridge Transactions **8**, 287, 1845; ebendort **9**, § 49, 1851; Phil. Mag. (4) **1**, 305, 1851; Kirchhoff (Pogg. Ann. Bd. **134**, 1868) hat dann den Effekt der Wärmeleitung berechnet und erkannt, daß er aus gastheoretischen Gründen wesentlich von derselben Größenordnung ist wie der der Reibung; Rayleigh, Theory of sound, 2. Aufl., Bd. 2, S. 24 u. 313 (London 1896) referiert Stokes; Kirchhoff kennt er nicht. Den Leitungseinfluß berechnet er selbständig, erkennt aber nicht den inneren Zusammenhang mit der Reibung.

in der Welle. Hierdurch wird ein in der Wellengleichung nicht vorgesehener Transport einerseits von Wärme, anderseits von Bewegungsgröße bedingt, beide im Sinne eines Ausgleichs der bestehenden Differenzen. Durch beide Umstände — Wärmeleitung und innere Reibung — die, wie man sieht, vom gastheoretischen Standpunkt beinahe ein und dasselbe sind, wird also bei fortschreitender Verdünnung die regelmäßige Wellenausbreitung immer erheblicher gestört und schließlich, wenn die Größenordnung der freien Weglänge die Wellenlänge erreicht hat, gänzlich unmöglich gemacht werden. Auch erkennen wir ohne jede Rechnung, daß die Störung für kurze Wellen größer sein bzw. schon bei höheren Drucken eintreten wird als für lange.

Die Rechnung ergibt, wie gesagt, daß die Störung in einer raschen Zunahme der bei normaler Dichte fast ganz zu vernachlässigenden Dämpfung besteht. Wir entnehmen dem zitierten Handbuch von Rayleigh den Wert des Dämpfungsexponenten für die Energie (d. i. für das Amplitudenquadrat)

$$k = -\left(\frac{4\pi^2(\varkappa-1)}{\varkappa}\,q + \frac{16\pi^2}{3}\,\frac{\mu}{\varrho}\right)\frac{z}{\lambda^2 v}. \qquad (32)$$

Hier bedeutet

$\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen,
$q$ die Temperaturleitfähigkeit,
$\mu$ den Koeffizienten der inneren Reibung,
$\varrho$ die Luftdichte,
$z$ die vom Schall zurückgelegte Wegstrecke,
$\lambda$ die Wellenlänge,
$v$ die Schallgeschwindigkeit.

Der Ausdruck (32) ist nur eine Annäherung für nicht zu große Werte von $q$ und $\frac{\mu}{\varrho}$. Er ist brauchbar, solange er für $z = \lambda$ klein ist gegen 1. Für Probleme der atmosphärischen Akustik genügt das, da hier viel größere Wegstrecken in Betracht kommen, auf denen der Schall praktisch völlig erlischt, wenn die Dämpfung auf der Strecke einer Wellenlänge noch geringfügig ist.

Um den gastheoretischen Aufbau des Ausdruckes (32) hervortreten zu lassen, setzen wir für $q$ und $\frac{\mu}{\varrho}$ die bekannten Werte ein

$$q = C c l, \quad \frac{\mu}{\varrho} = C' c l. \qquad (33)$$

$c$ ist die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Gasmoleküle, $l$ ihre mittlere freie Weglänge. Die Zahlenfaktoren $C$ und $C'$ haben wir in beiden Gleichungen unbestimmt gelassen und werden sie weiter unten aus experimentellen Daten bestimmen, um trotz der gastheoretischen Form den engen Anschluß an die Wirklichkeit zu sichern.

Nach Einsetzen der Ausdrücke (33) in (32) beachten wir noch, daß der Quotient $\frac{c}{v}$ den einfachen Wert $\sqrt{\frac{3}{\varkappa}}$ hat[1]). So erhalten wir schließlich

$$k = -D\frac{l z}{\lambda^2}, \qquad (32a)$$

wobei

$$D = \frac{4\pi^2(\varkappa-1)C\sqrt{3}}{\varkappa^{3/2}} + \frac{16\pi^2 C'\sqrt{3}}{3\sqrt{\varkappa}}. \qquad (34)$$

Diese Form läßt sehr anschaulich die von uns vorausgesehene entscheidende Bedeutung des Verhältnisses $\frac{l}{\lambda}$ erkennen.

Zur Berechnung von $C$ und $C'$ aus den Gleichungen (33) benützen wir folgende experimentelle Daten[2]), die sich auf 0° C und Atmosphärendruck beziehen und in [$c \cdot g \cdot s \cdot$ cal. °C] ausgedrückt sind. Es ist für Stickstoff:

Wärmeleitfähigkeit $= 5{,}2 \times 10^{-5}$,
Dichte $= 0{,}0012508$,
Spez. Wärme $= 0{,}174$,
daher $q = 0{,}239$,
ferner $c = 4{,}93 \times 10^4$[3]),
$l = 0{,}959 \times 10^{-5}$[3]).

Man findet $C = 0{,}505$.

Für $C'$ benützen wir die Daten für Luft:

$\mu = 0{,}000177$[4])
$\varrho = 0{,}001293$
$c = 4{,}85 \times 10^4$
$l = 10^{-5}$[5])

Man findet $C' = 0{,}285$.

Mit diesen Werten von $C$ und $C'$ finden wir aus (34)

$$D = 8{,}36 + 21{,}74 = 30{,}10^6),$$

demnach für den Exponenten der Dämpfung:

$$k = -30{,}10\frac{l z}{\lambda^2}, \qquad (32b)$$

---

1) Aus der geläufigen Druckformel $\left(p = \frac{n m c^2}{3}\right)$ in Verbindung mit Gleichung (9).

2) Entnommen zum größten Teil Dr. A. Lampas Lehrbuch der Physik, Wien, Braumüller 1908.

3) Ebendort aus empirischen Daten berechnet.

4) Ein mittlerer Wert. Lord Rayleigh benützt l. c. den Maxwellschen Wert 0,0001878, H. Lamb (The dynamical theory of sound, London 1910) nimmt $\mu = 0{,}000170$.

5) Sehr annähernd. Für Stickstoff wird $0{,}959 \times 10^{-5}$, für Sauerstoff $1{,}059 \times 10^{-5}$ angegeben.

6) $\varkappa$ wurde für Luft zu 1,4015 angenommen (siehe Lampa l. c.).

$l$ ist umgekehrt proportional mit der Dichte. Um einen Überblick über die Dämpfung der verschiedenen Wellenlängen in verschiedenen Schichten der Atmosphäre zu bekommen, verfahren wir folgendermaßen. Für $l$ am Erdboden setzen wir den oben benützten runden Wert $10^{-5}$ cm. Die Zunahme mit der Höhe berechnen wir nach der einfachen Barometerformel, also

$$l = 10^{-5} e^{\alpha z} \text{ cm}, \qquad (35)$$

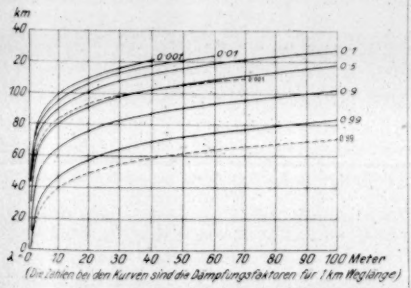
wobei $\alpha$ für eine einheitliche Temperatur der Atmosphäre von 0° C den Wert hat:

$$\alpha = 1{,}2516 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}.$$

Nehmen wir noch in (32b) $z = 10^5$ cm $= 1$ km, so ergibt sich aus (32b) und (35) für jene Höhe $x$, in welcher Wellen von der Länge $\lambda$ bei Zurücklegung einer Wegstrecke von 1 km eine Herabsetzung ihrer Intensität auf einen ganz bestimmten Bruchteil $e^k$ erfahren, der Wert:

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(2 \ln \lambda + \ln \frac{-\ln e^k}{30{,}10}\right). \qquad (36)$$

Indem man hier für $e^k$ der Reihe nach die Werte einsetzt: 0,99, 0,9, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001, erhält man die (stark ausgezogene) Kurvenschar nachstehender Figur (Koordinaten $x$ und $\lambda$), die ein übersichtliches Bild der Dämpfungsverhältnisse in verschiedenen Schichten der Atmosphäre liefert[1]).




Das enge Zusammenrücken der Kurven nach oben zu zeigt, daß die Dämpfung, sobald sie überhaupt beginnt sich bemerkbar zu machen, mit der Höhe rapide wächst. Für kurze Wellen (unter 10 m, das musikalisch am meisten verwendete Gebiet) beginnt schon in verhältnismäßig tiefen Schichten sehr starke, und zwar ausgesprochen selektive Absorption zugunsten der längeren Wellen. Bei langen Wellen fällt die Wellenlänge nicht mehr so stark ins Gewicht. Unter keinen Umständen werden die längsten Wellen, die noch eigentlichen Tönen entsprechen (bis etwa $\lambda = 30$ m) viel über 80 km hinaus vordringen können.

Diese Resultate gelten (entsprechend den für $\alpha$ und $l$ benützten Werten) für eine isotherme Atmosphäre von 0° C. In Wirklichkeit sinkt die Temperatur schon in geringen Höhen unter diesen Wert, die Dichte nimmt also mit der Höhe rascher ab, als wir vorausgesetzt haben. Die beiden feinpunktierten Linien zeigen die Lage der äußersten Kurven ($e^k = 0{,}99$ bzw. 0,001) bei $-45$° C, ein Wert, welcher der Mitteltemperatur dieser Atmosphärenschichten nahe kommen dürfte[1]). In Wirklichkeit sind also die Bedingungen für das Vordringen von Schallwellen in große Höhen noch ungünstiger.

Nach diesen Ergebnissen scheint mir die Möglichkeit, daß Schallstrahlen noch mit endlicher Intensität von der Grenze der Wasserstoffschicht zurückkehren, ziemlich gering, wenn wir nicht den Beginn dieser Schicht noch tiefer ansetzen dürfen, als er gegenwärtig vermutet wird (d. i. in 70—100 km über dem Erdboden). Denn es ist zu bedenken, daß zur Erklärung der äußeren Hörbarkeitsgebiete die Möglichkeit der Rückkehr unbedingt für solche Wellenlängen bestehen muß, die noch hörbaren Tönen entsprechen; und ferner, daß die in Betracht kommenden Schallstrahlen einen ziemlich schrägen Verlauf haben und nur ganz allmählich umgebogen werden, so daß sie viel größere Wegstrecken in großer Höhe zurücklegen, als etwa ein senkrecht bis zu der gleichen Höhe aufsteigender Strahl.

Unter allen Umständen würde meines Erachtens eine harmonische Analyse[2]) ein und derselben Explosionswelle im inneren und äußeren Hörbarkeitsgebiet von hervorragendem Interesse sein. Wegen des ausgesprochen selektiven Charakters der Absorption, der sich mit der Höhe rasch verschiebt, ließe sich aus den Intensitätsverhältnissen der in beiden Fällen noch vorhandenen Wellenarten ein direkter und sogar ziemlich scharfer Schluß auf die Höhe der Schicht ziehen, in welcher die Umkehr erfolgt ist.

1) Als ein Vorteil dieser Darstellungsweise muß hervorgehoben werden, daß Änderungen der numerischen Konstante (30,10) um einige Prozente auf den Verlauf der Kurven fast ohne Einfluß sind.

1) $-45$° ist eher zu hoch gegriffen. S. darüber R. Emden, Münchn. Ber. Jahrg. 1913, S. 55, und F. M. Exner, Meteorolog. Zeitschr. **32**, 318, 1915.

2) Etwa mittels hochempfindlicher Druckvariometer von der Art, wie sie Herr W. Schmidt zur Klanganalyse des Donners verwendet hat. S. Wien. Ber. **121** (2a), 2045, 1912; ebenda **123** (2a), 1914; Meteorolog. Zeitschr. **31**, 487, 1914.

(Eingegangen 31. Juli 1917.)

## Zur Theorie der Elektrodynamik.

Von R. Malmström.

Eine Schwierigkeit besteht für jede Theorie der elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern darin, daß sie sowohl den Versuch von Fizeau als denjenigen von Michelson erklären muß. Aus jenem folgt, daß die ponderable Materie bei ihrer Bewegung den Äther nicht mit sich führt, und hierdurch wird man zur Annahme eines absolut unbeweglichen Äthers gedrängt. Wenn es aber einen solchen gibt, so muß es bloß eine Frage der Genauigkeit sein, eine Bewegung relativ zum Äther zu konstatieren. Dieser Forderung genügt der Versuch von Michelson, und aus dessen negativem Resultat folgt also wiederum, entweder, daß es eine Bewegung relativ zum Äther nicht gibt, oder daß eine solche nicht nachgewiesen werden kann. Für das letztere entschloß sich Lorentz, indem er annahm, daß jeder Körper bei der Bewegung seine Dimension in der Bewegungsrichtung ändert. Einstein erreicht dasselbe durch Einführung eines neuen Zeitbegriffs. Da der Zeitbegriff mit anderen Grundbegriffen der Physik in Zusammenhang steht, so ist es wohl möglich auf diese Weise ein in sich konsequentes System der Physik aufzubauen. Nur müssen alle mit dem Zeitbegriff zusammenhängenden Grundbegriffe entsprechend abgeändert werden.

Um dem vorzubeugen, hat W. Ritz[1]) eine Theorie aufgestellt, in der die zwischen den Elektronen wirkenden Kräfte nur von den Relativgeschwindigkeiten abhängen. Er denkt sich von jedem Elektron gleichsam materielle Partikelchen mit der Lichtgeschwindigkeit und nach den Gesetzen der Relativbewegung ausströmen und setzt die Kraft in jedem Punkte der Dichtigkeit dieser Partikelchen proportional. Da er aber nur Wirkungen zwischen den Elektronen annimmt, so wird der Versuch von Fizeau nicht erklärt, und da die Partikelchen nach dem Verlassen des Elektrons sich ganz selbständig nach dem Trägheitsgesetz weiter bewegen, so ist die Theorie für die Optik nicht verwendbar. Dagegen werden alle pondero- und elektromotorischen Kräfte zwischen geschlossenen elektrischen Strömen sowie die Versuche von Rowland, Röntgen und Eichenwald richtig wiedergegeben.

Es scheint aber außer den von Lorentz und Einstein gewählten Wegen noch einen dritten zu geben, um den scheinbaren Widerspruch zwischen den Versuchen von Fizeau und Michelson zu beseitigen, und zwar ohne daß man, wie in der Relativitätstheorie, vielen Naturgesetzen, die bis jetzt als streng gültig angesehen wurden, eine nur approximative Gültigkeit zuschreiben muß. Stellen wir uns auf den Boden der Lorentzschen Elektronentheorie, so haben wir anzunehmen, daß alle elektromagnetischen Vorgänge auf Wirkungen von Elektronen zurückzuführen sind. Die beiden Tatsachen, die erklärt werden sollen, sind dann folgende: 1. wenn sich ponderable Materie in dem Felde von (schwingenden) Elektronen bewegt, so führt sie nicht das ganze Feld mit sich (der Äther bleibt in Ruhe); 2. wenn sich eine Lichtquelle (schwingendes Elektron) bewegt, so erfolgt die Lichtfortpflanzung so, als ob die Lichtquelle (das Elektron) den Äther mit sich führte. Diese beiden sich scheinbar widersprechenden Tatsachen kann man offenbar in Einklang bringen, wenn man annimmt, daß es nicht nur einen Äther gibt, sondern daß jedes Elektron einen Äther hat, den es bei seiner Bewegung mit sich führt. Da der Äther im elektromagnetischen Sinne ein polarisierbarer Körper ohne Masse ist, so liegt hierin durchaus nichts Absurdes.

In einer entsprechenden mechanischen Theorie dagegen müßte die Masse des Äthers endlich und somit die Dichte umgekehrt proportional der vierten Potenz des Abstandes vom Elektron sein. Ein solcher Äther würde der atomistischen Auffassung besser entsprechen.

Eine auf dieser Grundlage aufgebaute Theorie muß die Bedingungen erfüllen, daß erstens die Ausstrahlung nur von der Beschleunigung, und daß zweitens die gegenseitige Wirkung zweier Elektronen nur von ihrer relativen Bewegung abhängt. Der ersten Bedingung genügen wir dadurch, daß wir in dem Lorentzschen Ausdruck für die Feldstärke eines Elektrons das die Absolutgeschwindigkeit enthaltende Glied fortlassen und den übrigen Gliedern eine unserer Grundvorstellung entsprechende Form geben, der zweiten Bedingung, indem wir das von Riemann[1]) aufgestellte Grundgesetz zu Hilfe nehmen. Wir können uns also etwa folgendermaßen ausdrücken.

Wenn sich ein Elektron bewegt, so ist die Feldstärke in dem Äther des Elektrons definiert durch die Formel

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\frac{e}{r} + \frac{e}{r}\frac{\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right]}{c^2}\,,^2)$$

oder die $x$-Komponente

1) Rech. crit. sur l'électrodynamique générale. Ann. de Chim. et de Phys. (8) 13, 145—275.

1) Schwere, Elektrizität und Magnetismus, §§ 98, 99 und Enzykl. d. math. Wiss., Bd. V, Art. Reiff-Sommerfeld.

2) Abraham-Föppl, Teil II.

$$\mathfrak{E}_x = \frac{e}{r^2}\cos(r, x) + \frac{e}{r}\frac{[a_r]\cos(r, x) - [a_x]}{c^2}.$$

Hier bedeutet $e$ die Ladung des Elektrons, $r$ den Abstand des Aufpunktes, $a$ bzw. $[a_r]$ und $[a_x]$ die Beschleunigung und dessen Komponenten in Richtung von $r$ bzw. $x$ zur Zeit $t - \frac{r}{c}$, $\mathfrak{r}_1$ einen Einheitsvektor und $c$ die Lichtgeschwindigkeit. Diese Formel gilt für ein mit dem Elektron bewegtes Koordinatensystem. Das elektrostatische Feld wird also unverändert mitgeführt[1]) und nur durch die Beschleunigung erfolgt eine Ausstrahlung. Für ein schwingendes Elektron erhält man die elektrische Feldstärke, wie sie die Theorie von Lorentz in der Wellenzone gibt.

Wenn sich nun ein zweites Elektron mit der Ladung $e'$ in dem Felde (Äther) des ersten Elektrons bewegt, so erfährt es eine Kraftwirkung, die erstens ein Glied $e'\mathfrak{E}$ enthält, außerdem aber andere Glieder, die von der Bewegung relativ zum Felde (Äther) abhängen. Wir denken uns ein Koordinatensystem, welches eine gleichförmige geradlinige Translationsbewegung hat. In diesem System seien die Koordinaten der beiden Elektronen $xyz$ und $x'y'z'$, ihre Geschwindigkeiten $v$ und $v'$, so daß die Geschwindigkeit des zweiten Elektrons in dem mit dem ersten bewegten Koordinatensystem $u = v' - v$ oder

$$u^2 = (v_x' - v_x)^2 + (v_y' - v_y)^2 + (v_z' - v_z)^2.$$

Es wird dann die $x$-Komponente der von der Relativbewegung abhängigen Kraft

$$-\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{ee'}{r}\frac{u^2}{2c^2}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\left(\frac{ee'}{r}\frac{u^2}{2c^2}\right),$$

und die $x$-Komponente der ganzen Kraft

$$e'F_x = -\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)\right] + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)\right] + \frac{ee'}{r}\frac{[a_r]\cos(r, x) - [a_x]}{c^2}.$$

Wenn die in Betracht kommenden Abstände klein sind, können wir im letzten Glied die Beschleunigung für den Augenblick einführen. Es ist aber

$$a_r = \frac{a_x(x' - x) + a_y(y' - y) + a_z(z' - z)}{r},$$

$$-\frac{\partial a_r}{\partial x'} = \frac{a_r\cos(r, x) - a_x}{r}\,^2),$$

so daß wir als Kraftgesetz schreiben können

$$e'F_x = -\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{ee'a_r}{c^2}\right] + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{ee'a_r}{c^2}\right].$$

Dieses Gesetz unterscheidet sich von dem Riemannschen nur durch das Glied

$$\frac{ee'}{r}\frac{a_r\cos(r, x) - a_x}{c^2}.$$

Da Riemanns Gesetz die ponderomotorischen Kräfte und die Induktionsgesetze für geschlossene Ströme richtig wiedergibt, so ist das auch mit dem unsrigen der Fall, da ja das Linienintegral des hinzugekommenen Gliedes längs einer geschlossenen Kurve gleich Null ist, und dieses Glied nur für die Induktion in Betracht kommt. Ebenso steht die Theorie im Einklang mit den Versuchen von Rowland, Röntgen und Eichenwald.

Gegen das Riemannsche Gesetz hat Clausius[1]) den Einwand erhoben, daß aus demselben eine ponderomotorische Wirkung eines konstanten elektrischen Stromes auf ruhende Ladungen folgt. Um die Sache zu untersuchen, betrachten wir die Wirkung, die ein Element $ds$ eines geschlossenen Stromes auf ein relativ zum Stromleiter ruhendes elektrisches Teilchen ausübt. In dem Kraftgesetz fallen erstens die von der Beschleunigung abhängigen Glieder fort, zweitens das Glied

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\frac{ee'}{c^2 r}\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right) = \frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{v_x' - v_x}{r} = -\frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{r}\right),$$

weil wir

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{ds}{dt} \quad \text{und} \quad v_x = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt},$$

und folglich das Glied

$$= -\frac{ee'}{c^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{1}{r}\right)$$

schreiben können und dieses über den geschlossenen Stromkreis integriert den Wert Null ergibt. Schließlich verschwindet das elektrostatische Glied, wenn wir zunächst den Leiter als ungeladen ansehen. Es bleibt also das Glied

$$-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{ee'}{r}\frac{u^2}{2c^2}\right]$$

übrig. Die Geschwindigkeit $u$ ist hier gleich der Geschwindigkeit der strömenden Elektrizität

1) Von einer unendlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit kann infolge der Grundannahme nicht die Rede sein, da ja dieses Glied eine bleibende, von der Zeit unabhängige Erregung des vom Elektron mitgeführten Äthers darstellt.

2) Ritz, loc. cit.

1) Die mechanische Behandlung der Elektrizität, Abschnitt IX, § 3, S. 232.

relativ zum Leiter. Bezeichnen wir die Dichte der positiven und die gleich große der negativen strömenden Elektrizität mit $\varrho$, die Geschwindigkeiten mit $v_1$ und $v_2$ und ein Volumelement im Stromleiter mit $dS$, so haben wir $eu^2$ durch

$$\varrho\,(v_1^2 - v_2^2)\,dS$$

zu ersetzen. Die von dem Stromelement ausgeübte Kraft hat demnach das Potential

$$\frac{\varrho\,(v_1^2 - v_2^2)\,dS}{2\,r\,c^2}.$$

Eine solche Kraft wird auch auf die in jedem Leiter befindliche Elektrizität ausgeübt, und hieraus folgt, daß alle Leiter in der Nähe eines konstanten elektrischen Stromes geladen werden. Bezeichnen wir also das Potential der ruhenden Elektrizität mit $\varphi$, das oben angegebene der strömenden Elektrizität mit $\psi$, so muß in jedem Leiter

$$\varphi + \psi = \text{const}$$

sein. Dies gilt aber auch für den stromführenden Leiter selbst, und in diesem entsteht demnach nicht nur eine Flächen-, sondern auch eine räumliche Ladung mit der Dichte

$$\varrho' = -\varrho\,\frac{v_1^2 - v_2^2}{2\,c^2},$$

und diese Ladung hebt die Wirkung des Stromes auf ruhende Ladungen auf. Sie entspricht genau der „Kompensationsladung", die nach der Theorie von Lorentz in jedem stromführenden Leiter entsteht, wenn er sich relativ zum Äther bewegt, also z. B. die Erdbewegung mitmacht. Nur ist diese Ladung bedeutend stärker als die nach der Riemannschen Theorie entstehende, da sie proportional der Stromstärke und Geschwindigkeit der Erde, während die Riemannsche Kompensationsladung proportional $\varrho\,(v_1 - v_2)\,(v_1 + v_2) = i\,(v_1 + v_2)$, d. h. der Stromstärke und Geschwindigkeit der strömenden Elektrizität ist. Der Einwand muß somit als widerlegt angesehen werden.

Die hier versuchsweise skizzierte Theorie steht nicht in Einklang mit den Versuchen über $\beta$-Strahlen. Hieraus folgt aber nicht, daß auch die grundlegende Hypothese sofort zu verwerfen ist. Man wird zunächst nur die mathematische Formulierung zu verändern versuchen, indem man etwa das Riemannsche Potential als den Anfang einer Reihenentwicklung betrachtet, oder nach Ritz sogar das Hamiltonsche Prinzip ganz aufgibt. Hierdurch wird man wohl ohne Annahme einer veränderlichen Masse auskommen können, da ja, wie schon in dem Riemannschen Potential, die elektrische, arbeitsleistende Kraft von der Geschwindigkeit abhängen wird, während dies in der Lorentzschen Theorie bloß mit der magnetischen, senkrecht zur Bewegung wirkenden Kraft der Fall ist. Der Zweck dieser Mitteilung war eben nur der, diese Grundhypothese, daß jedes Elektron einen Äther hat, den es bei seiner Bewegung mitführt, zur Beurteilung vorzulegen.

Zusammenfassung.

1. Es wird die Hypothese aufgestellt, daß jedes Elektron einen Äther hat, den es bei seiner Bewegung mitführt. Hierdurch kann der scheinbare Widerspruch zwischen den Versuchsresultaten von Fizeau und Michelson aufgehoben werden.
2. Für die Feldstärke im Äther eines Elektrons wird versuchsweise durch Kombination der Elementargesetze von Riemann und Lorentz ein Ausdruck erhalten, welcher alle elektromagnetischen Erscheinungen mit Ausnahme der $\beta$-Strahlung richtig wiedergibt. Um auch diese letztere zu erklären, müßte die Theorie noch erweitert werden.

(Eingegangen 3. August 1917.)

## Die Ätherhypothese.

Von G. Helm.

Während das Relativitätsprinzip den Äther beseitigt, entzieht es der Naturbetrachtung mancherlei Anschauungsbehelfe, durch die sich die Ätherhypothese wertvoll erwiesen hat. Es lohnt sich deshalb, ihre seit Jahrhunderten ausgebildeten und angewöhnten Überlieferungen einer Durchprüfung zu unterziehen, um festzustellen, inwieweit die Vorzüge erhalten bleiben können, die der Anschauung von der Kinematik des Kontinuums dargeboten werden, ob z. B. unbequemere Vorstellungen, wie etwa die Maxwellschen Ätherspannungen, aufgegeben werden können: Die Theorie soll ja nicht die Erfahrungen nur wiedergeben, sie soll es vielmehr auf die einfachste Weise.

Dabei wird sich freilich eine Auffassung nötig erweisen, die kaum weniger befremdend erscheint, als das Relativitätsprinzip; erschwert dieses zunächst das Denken, indem es die angewöhnten Vorstellungen über Raum und Zeit erweitert, so erfordert die folgestreng durchgeführte Ätherhypothese[1]) die überkommenen Ansichten über die Substanz der materiellen Körper preiszugeben, nämlich die Körper als Phasen des Äthers anzusehen, aus derselben

1) Vgl. Helm, Das Relativitätsprinzip in der Ätherhypothese. Diese Ztschr. 13, 157, 1912.

Substanz aufgebaut wie er, — etwa nach Art der Wolken und Nebel in der Atmosphäre oder der mannigfach leuchtenden Teile in einer Flamme.

Andererseits wird sich zeigen, daß die streng durchgeführte Ätherhypothese zur mathematisch strengsten Grundlegung des Atomismus führt, indem sie ihn mit Hilfe der singulären Stellen gewisser Funktionen und Vektorverteilungen aufbaut.

Vor allem aber soll unsere Untersuchung zu der Frage beitragen, über welche Anschauungen die Mikrophysik noch frei verfügen kann und wie weit sie durch die Forderungen der Mechanik und durch die Fernwirkungstheorien des Äthers bereits gebunden ist.

**1.** An der alten Grundlage der Ätherttheorie halten wir fest: Den unbegrenzten Raum erfüllt in allen seinen Teilen ein Mittel, dessen Punkte nur sehr kleiner Verschiebungen $\mathfrak{A}$ aus ihrer Gleichgewichtslage fähig sind. Sie sollen sich nach Art der Teile eines elastisch-festen Körpers bewegen können, doch so, daß Längsschwingungen ausgeschlossen sind und durch Verwindungen Spannungen hervorgerufen werden, also so, daß für die Komponenten $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ des Verschiebungsvektors $\mathfrak{A}$ die Differentialgleichungen gelten

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta \mathfrak{A}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0, \qquad (1)$$

wobei $v$ die Lichtgeschwindigkeit der Leere bedeutet.

**2.** In Sonderstellen aber, in denen die Funktionen $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ der Koordinaten $x, y, z$ und der Zeit $t$ nicht differentiierbar sind, verlieren diese Differentialgleichungen ihren Sinn, und in all den einzelnen begrenzten Raumteilen, die als materielle Körper bezeichnet werden, kommen solche singuläre Stellen vor, die Kernpunkte heißen sollen und die Funktionen $\mathfrak{A}$ mathematisch charakterisieren.

Die Schwierigkeiten, die das Auftreten dieser Singularitäten mit sich bringt, können nun, wie es von jeher üblich ist, dadurch beseitigt werden, daß man die Raumteile, in denen Kerne vorkommen, stetig mit Substanz erfüllt denkt, also eine Substanz fingiert, die wegen der aus der Potentialtheorie bekannten Eigenschaften der Integrale, von denen die Gleichungen (1) befriedigt werden, das Feld überall stetig erscheinen läßt, ohne es, wenigstens in hinreichender Entfernung, merklich zu ändern. Ein solches Kollektiv, ein solcher statistischer Inbegriff eines Äthervolumens mit seinen singulären Punkten, der sich verhält, als ob ein Raum stetig erfüllt wäre, soll als scheinbare Substanz bezeichnet werden. In einer solchen scheinbaren Substanz sind dann auch $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ differentiierbar, aber $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ ist nicht mehr Null, wie es im Äther nach den Gleichungen (1) der Fall ist, die scheinbare Substanz stellt sich als Veränderung, als Phase des Äthers dar. —

Die Funktionen $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ enthalten die Koordinaten $X, Y, Z$ der Kernpunkte außer den Koordinaten $x, y, z$ des Bezugspunktes und der Zeit $t$. Sie genügen den Gleichungen (1) auch dann, wenn $X, Y, Z$ selbst Funktionen der Zeit sind, falls nur die Geschwindigkeiten $X', Y', Z'$ klein gegen $v$ bleiben. Die Kernpunkte mit ihren Vektorfeldern kann man sich daher als in ungeordneten Verschiebungen begriffen vorstellen.

Und wenn man die singulären Punkte eines kleinen Raumgebietes zusammen mit dem Äther dieses Gebietes als ein einheitliches Ganzes, also als eine scheinbare Substanz auffaßt, etwa als ein Atom, dann wird man diesem Gebilde eine schnell und ungeordnet wechselnde Geschwindigkeit beizulegen haben, um den Bewegungen der Felder aller in ihm zusammengefaßten Kerne Rechnung zu tragen. Als solche aus Äther und singulären Stellen gebildete Systeme, als solche scheinbare Substanzen erscheinen uns die Atome, Molekeln, Ionen, wie die Bohrschen Kerne, die Elektronen, Magnetomen und Oszillatoren der Molekularphysik, aber auch die Volumelemente der Körper in der Kontinuitätsphysik. Als Ort eines solchen Gebildes hat man die augenblickliche Mittellage der Kerne anzusehen, die in ihm zusammengefaßt sind, als Temperatur die Streuung der Kerne um ihre Mittellage.

**3.** Wir sind gewöhnt, die Kerne oder vielmehr die aus ihnen aufgebauten scheinbaren Substanzen, die Kernsysteme, als Ursachen der Vektorverteilungen $\mathfrak{A}$ anzusehen, aber theoretisch begründet ist es nicht, die Beziehung lediglich einseitig aufzufassen. Die Kerne sind vielmehr mit den Vektorfunktionen $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ verknüpft, als deren singuläre Punkte diese Funktionen bestimmend, ebenso wie durch sie bestimmt. Indessen, bequem ist es, die Beeinflussung einer Vektorverteilung durch eine andere auf gegenseitige Beeinflussung ihrer Kerne zurückzuführen, und jedenfalls genügt es für unsere Zwecke, uns einen solchen Einfluß nach Art der allgemeinsten Vorstellungen über Strahlung zu denken.

Wo immer wir also, um die Erscheinungen zu beschreiben, veranlaßt sind, die an sich einheitliche Vektorverteilung $\mathfrak{A}$ in Teilgebiete zu zerfällen, die aufeinander wirken, wollen wir uns vorstellen, daß Energie von dem einen Gebiete

dem andern zugestrahlt wird, und daß die Kerne jedes Gebietes einen Energiebetrag absorbieren, der proportional dem von ihnen emittierten Betrage ist, nämlich dem zur Aufrechterhaltung jener besonderen Kollektivanordnung, jener besonderen Konstellation der Kerne erforderlichen Betrage, die dieses Raumgebiet physikalisch kennzeichnet. So wird immer die für ein Raumgebiet verfügbare Energie als ein Produkt erscheinen aus einem Intensitätsfaktor, der proportional der Einstrahlung ist, und einem Extensitätsfaktor, proportional der Emissions- und der Absorptionsfähigkeit dieses Raumgebietes. Diese Auffassung wird sich wenigstens genügend erweisen, um das von der gewöhnlichen Mechanik und von den Maxwell-Hertzschen Gleichungen umfaßte Erscheinungsgebiet ausreichend zu beschreiben.

**4.** Wer sich den Aufbau der scheinbaren Substanzen aus singulären Punkten, aus mathematischen Punkten, klar macht, wird die Bewegung der Körper nicht mehr nach Art der Verschiebung durch eine Flüssigkeit auffassen, und die Frage, wie sichtbare Bewegung der Körper zustande kommt, wird nun einfach dahin beantwortet: im gewöhnlichen Sinne kommt sie überhaupt nicht zustande. Nicht eine Substanz wandert, wo wir Bewegung wahrnehmen, sondern die durchschnittliche Anordnung der singulären Punkte im Äther, eigentlich der Vektorverteilungen um sie, verschiebt sich, indem andere Raumpunkte singulär werden, — ein Feld durchwandert den Raum oder sein Repräsentant, der Kernpunkt. Die Anordnung der neuen Kernpunktlagen ist zwar der der verlassenen nicht kongruent, aber doch so nahe kongruent, wie sie sein würde, wenn keine sichtbare Bewegung stattgefunden hätte, sondern bloß der Wechsel jener Zustände, deren kollektive Gesamtheit wir nur zu beobachten vermögen.

Und wenn man die Kernsysteme, mit dem Äther, in dem sie eingesprengt sind, vereinigt, als homogene Phase des Äthers, etwa als Verflüssigungsstelle im sonst vergleichsweise fest gedachten Äther, ansieht, muß man sagen: Nicht Stoffliches wandert, wo wir Bewegung wahrnehmen, sondern die Phase, der Zustand des Äthers verschiebt sich, indem dieser Zustand auf Nachbargebiete übergeht. Geht er gleichförmig über, so wird an der Vorderseite ebensoviel Äther verflüssigt, wie an der Hinterseite flüssiger fest wird. Zur gleichförmigen Bewegung bedarf es also keines Energieaufwandes, wenn man festsetzt, daß der Energieaufwand für die Umordnung eines Kernsystems dem für die rückgängige Umordnung entgegengesetzt gleich ist, wie bei den gewöhnlichen Aggregatsänderungen.

Sichtbare Bewegung tritt ein, wenn von den wechselnden Richtungen, nach denen in ungeordneter Folge jeder Kernpunkt und jeder Körperteil sich bewegt, eine bestimmte infolge der besonderen Beschaffenheit des Feldes bevorzugt wird. So erscheint die sichtbare Bewegung als ein mittlerer Zustand, als ein Kollektivergebnis aller Elementarbewegungen, die nach **2.** jedem Körperteil zukommen.

Wir setzen die Energie, die zur Übertragung der Volumeinheit eines Kernsystems durch den Raum mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ nötig ist, gleich $\frac{1}{2} m V^2$, indem wir eine für das physikalische Verhalten dieser Volumeinheit kennzeichnende Konstante $m$ einführen; dann ist auch $\mathfrak{V}$ eine das System in seinem augenblicklichen Zustand kennzeichnende, mit ihm den Raum durchwandernde Konstante.

Diese Festsetzungen bedeuten grundsätzliche Abweichungen von den bisherigen mißglückten Versuchen, die Ätherverschiebungen $\mathfrak{A}$ selbst oder die aus ihnen hervorgehenden Spannungen im Äther als unmittelbaren Antrieb für die Bewegungen der Körper anzusehen. Nicht dualistisch wollen wir die Körper als das Angetriebene betrachten neben dem Äther, der sie antreibt, sondern in den Körpern Ätherzustände sehen, die im Raume fortzuwandern vermögen; nicht die Übertragung der Bewegung einer Flüssigkeit auf einen in ihr treibenden festen Körper oder die Übertragung der Spannungen zwischen sich berührenden elastisch-festen Körpern wollen wir zum Anhaltspunkt und Leitgedanken wählen, sondern die einfachsten Vorstellungen über Absorption und Emission strahlender Energie, durch die etwa ein Niederschlagsgebiet in feuchter Luft fortschreitet. Die Spannungen im Äther sind für die Bewegungen der Ätherteile um ihre Gleichgewichtslagen maßgebend, nicht für die Verlegung der Vektorfelder oder der sie repräsentierenden singulären Stellen, demnach nicht für die sichtbare Bewegung der Körper, die vielmehr durch besondere energetische Festsetzungen zu regeln ist. Diese besonderen Festsetzungen sind der Erfahrung gemäß zu wählen, in mathematischer Hinsicht entsprechen sie den Integrationskonstanten und Grenzbedingungen.

**5.** Wir erhalten die Erscheinungen der allgemeinen Gravitation als die Lösung, die unsern Differentialgleichungen (1) genügt, wenn die Veränderungen der Funktionswerte $\mathfrak{A}$ oder auch die Veränderungen der Lage ihrer singulären Stellen mit einer gegen $v$ geringen Geschwindigkeit erfolgen. Der Vektor

$$\mathfrak{A} = \operatorname{grad} \frac{\varkappa m}{r}, \qquad (2)$$

wo $\varkappa$ die allgemeine Gravitationskonstante, ist dann die Ätherverschiebung im Abstande $r$ von der Volumeinheit. Dabei erscheint wieder die unter **4.** eingeführte stoffliche Konstante der Emission und Absorption, die von Beschaffenheit und Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Kerne abhängige Massendichte.

Faßt man den Volumteil, in dem sich die Kerne befinden, als homogen auf, als scheinbare Substanz, so bleiben $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ überall endlich und stetig, während $\operatorname{div}\mathfrak{A}$ in dieser scheinbaren Substanz den Wert $-4\pi m\varkappa$ annimmt.

Solch ein Feld $\mathfrak{A}$ kann nie verlöschen, es kann sich nur — mittels Transversalwellen — durch den Raum hindurch verlegen.

Wie die Kerne und Kernsysteme den Raum durchwandern, während sich die Verschiebungen $\mathfrak{A}$ im Äther ausbilden, kann nur durch besondere Angabe der in diesem Durchwandern sich bekundenden Energie festgestellt werden. Der Gedanke, daß die Zahl $m$ für Emission wie Absorption der Energie der Volumeinheit maßgebend ist, indem sie das Bestreben mißt, die dort bestehende Anordnung der Kerne aufrecht zu erhalten, führt dazu, als gesamte, von der Gravitation im Äther angesammelte Energie des unbegrenzten Raumes, dessen körperliche Elemente mit $dk$, $dk'$ bezeichnet werden,

$$\frac{1}{8\pi\varkappa}\int \mathfrak{A}^2\, dk = \frac{\varkappa}{2}\int\int \frac{m}{r}\, m'\, dk\, dk' \qquad (3a)$$

anzusehen, so daß als potentielle Energie der sichtbaren Bewegungen zur Verfügung steht

$$-\frac{\varkappa}{2}\int\int \frac{m}{r}\, m'\, dk\, dk'. \qquad (3b)$$

**6.** Weiter sind nun die Vorgänge zu betrachten, bei denen sich die Ätherverschiebungen $\mathfrak{A}$ mit großer, gegenüber der Lichtgeschwindigkeit $v$ nicht zu vernachlässigenden Geschwindigkeit bewegen.

Wenn ein Volumteil seinen durchschnittlichen Besitzstand an Kernen mit benachbarten Volumteilen ausgleicht, erscheint er im Zustande der Durchströmung; und auch wenn er ihn aufrecht erhält, kann doch der Volumteil Andrang oder Abdrang von Kernen zeigen, Zustände, die durch vorangegangene Strömungen veranlaßt sind oder zu späteren Strömungen führen würden, wenn die benachbarten Volumteile Strömungsausgleich gestatten. Diese Strömungs- und Drangzustände bilden den Gegenstand der elektrischen Vorgänge.

Übrigens kann hier dahingestellt bleiben, ob dieselben Kerne, die bei langsamen Veränderungen die Gravitationserscheinungen bedingen, bei hinreichend schnellen Änderungen zu den elektrischen Vorgängen führen, oder ob es zweckmäßiger ist, zwei Arten von Kernen zu unterscheiden, neben den Gravitationskernen noch die Elektrokerne, die sich gegen jene verschieben.

Die durchschnittliche Verschiebung der schnell, explosionsartig bewegten Kerne gegen die ihre Lage langsam ändernden möge als dielektrische Verschiebung $\mathfrak{d}$ bezeichnet werden, so lange sie nicht zu Übergängen in das Bereich makroskopisch anderer Kernsysteme führt; ist letzteres der Fall, so sagen wir, daß Strömung $\mathfrak{i}$ vorliegt, und setzen, die Gesamtströmung $\mathfrak{j}$ einführend,

$$4\pi\mathfrak{j} = 4\pi\mathfrak{i} + \mathfrak{d}', \quad \operatorname{div}\mathfrak{j} = 0. \qquad (4)$$

Dann werden die Gleichungen (1) in allen strömungsfreien Gebieten durch den Ansatz befriedigt

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c}\int \mathfrak{j}\frac{dk}{r}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0, \qquad (5a)$$

da er gleichwertig ist mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta\mathfrak{A} + 4\pi\frac{c}{\varepsilon}\mathfrak{j}, \qquad (5b)$$

wobei die Maxwellschen Konstanten so eingeführt sind, daß

$$v^2 = c^2 : \varepsilon\mu. \qquad (6)$$

Unter dem Integralzeichen sind hier selbstverständlich, um $\mathfrak{A}$ im Bezugspunkte zur Bezugszeit anzugeben, die Werte für $\mathfrak{j}$ und $r$ einzuführen, die dem Zustande des Volumelements $dk$ um $r:v$ Zeiteinheiten früher entsprechen.

Jedes durchströmte Gebiet aber verhält sich nun als eine scheinbare Substanz, in der statt der Gleichungen (1) eben die Gleichungen (5b) gelten.

Selbstverständlich wird man sich gegenwärtig zu halten haben, daß das „Strömen von Kernen" nur eine bequeme Fassung für die Verlegung der Vektorfelder $\mathfrak{A}$ ist, deren singuläre Stellen jene Kerne sind.

Auch erscheint es an dieser Stelle angebracht, darauf hinzuweisen, daß die Differentialgleichungen (1) Longitudinalwellen ausschließen. Das Feld der radial nach einem Kerne $K$ gerichteten Ätherverschiebungen kann also nicht etwa durch Radialwellen von $K$ aus verlöschen, sondern seine Vektoren $\mathfrak{A}$ verschieben sich parallel, wenn $K$ nach $K'$ rückt, so daß ein beliebiges Volumelement des Äthers statt von $\mathfrak{A}$ nunmehr von $\mathfrak{A}'$ ergriffen wird, also eine durch $-\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ bestimmte Verwindung erfährt. Von der Linie

$KK'$ aus schreiten Transversalwellen fort, die diese Verwindungen bewirken, wenn sich das Feld in der Richtung $KK'$ entlädt.

**7.** Im elektrostatischen Falle, $\mathfrak{i} = 0$, bestimmt die Funktion

$$\varphi = \int \frac{e\,dk}{\varepsilon r}, \quad 4\pi e = \operatorname{div} \mathfrak{d} \tag{7a}$$

den Verdichtungszustand der Kerne, ihren An- oder Abdrang im Volumelement des Bezugspunktes. Sie erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta\varphi + 4\pi \frac{v^2}{\varepsilon} \cdot e, \tag{7b}$$

gibt also Veranlassung zur Konstruktion scheinbarer Substanzen oder Ätherphasen an allen Stellen, wo $e$ nicht Null ist.

Das elektrostatische Potential $\varphi$ stellt das jeweilige Ergebnis der ganzen Vorgeschichte des Volumelements dar, auf das es sich bezieht. Denn die Lagen der Kerne in jedem Volumelement sind durch die voraufgegangenen Transversalverschiebungen $\mathfrak{A}$ des Äthers zustande gekommen, mit denen sie durch die Gleichungen (4) und (5) verknüpft sind.

Der Vektor

$$\mathfrak{E}_0 = -\operatorname{grad} \varphi \tag{8a}$$

entspricht mathematisch den Gravitationsverschiebungen $\mathfrak{A}$ nach Gleichung (2), nur mißt er nicht Verschiebungen des Äthers, sondern Verdichtungszustände der singulären Punkte in ihm oder der scheinbaren Substanz, die aus ihnen gebildet ist. Diese Ätherverschiebungen sind vom Betrag

$$\mathfrak{d} = \varepsilon \mathfrak{E}_0 = -\operatorname{grad} \varepsilon\varphi. \tag{8b}$$

Da wegen $\operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$ noch

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = -e'$$

ist, so bleibt die Gesamtsumme aller $e$ im unbegrenzten Raume unveränderlich; man wählt sie gleich Null und denkt sich die Volumelemente mit positiven $e$-Werten behaftet, wenn sie Andrang, mit negativen, wenn sie Abdrang der Kerne zeigen. So gelangt man zu der Vorstellung, daß negative Kerne über alle Teile des Raumes zerstreut sind, während die positiven den ponderablen Kernansammlungen anhaften.

Die für sichtbare Bewegungen und Wärmeentwicklungen verfügbare elektrostatische Energie setzen wir

$$\frac{1}{8\pi} \int \varepsilon \mathfrak{E}_0^2 \cdot dk = \frac{1}{2} \int\int \frac{e e'}{\varepsilon r}\, dk\, dk'. \tag{9}$$

Die kinetische Energie, die im Gravitationsfalle durch die Ätherverschiebungen unmittelbar nach Gleichung (2) bestimmt ist, erscheint hier erst vermittelt durch diese in den Ätherverschiebungen der Kerne aufgespeicherte potentielle Energie.

Wie die elektrostatische Fernwirkung auf Grund des Ansatzes (9) zustande kommt, kann man sich in folgender Weise veranschaulichen (vgl. Helm, Elektrodynamik, S. 150): Wenn in einem Andrangsfelde um den Punkt $A$ sich eine Andrangsstelle befindet, so wird in letzterer an der $A$ zugewendeten Seite der Andrang geschwächt, an der Abseite aber wird er verstärkt. Die Flächen gleichen Andrangs nach $B$ haben also nicht mehr $B$ zum Mittelpunkt, sind vielmehr nach jener Abseite verschoben, entsprechend einer von $A$ ausgeübten Abstoßung. Diese Störung veranschaulicht die potentielle Energie, mit der das Volumelement bei $B$ seine Ordnung wieder herzustellen bestrebt ist.

**8.** Ist $\mathfrak{i}$ nicht Null, im allgemeinen elektromagnetischen Felde also, so hat man außer den Verdichtungs- noch die Verwindungsstellen der Kernsysteme zu beachten und die Verwindungen des Äthers, deren singuläre Punkte jene sind. In den Verwindungsstellen der Kernsysteme ist die magnetische Erregung durch vorangegangene Ätherverwindungen ebenso aufgespeichert, wie in den Verdichtungsstellen die elektrische.

Man setze, die magnetische Feldstärke $\mathfrak{M}$ einführend,

$$\mu \cdot \mathfrak{M} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \tag{10}$$

als Maß der Verwindung des Äthers gegen die ponderablen Kerne, die ja als geometrische Punkte nicht an der Verwindung teilnehmen.

Da diese Punkte an der Ätherverschiebung $\mathfrak{A}$ teilnehmen und eben dadurch zu elektrostatischen Verdichtungen führen, wird als elektrische Feldstärke, d. h. als Maß der augenblicklichen elektrischen Verdichtung, die Relativverschiebung des Äthers gegen die Gravitationskerne

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{1}{c} \mathfrak{A}' \tag{11}$$

eingeführt. Mit diesen Ansätzen gelangt man unter Berücksichtigung der Gleichung (4) zu dem Hertzschen Gleichungssysteme

$$\varepsilon \mathfrak{E}' + 4\pi\lambda \mathfrak{E} = c \operatorname{rot} \mathfrak{M}, \quad \mu \mathfrak{M}' = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}, \tag{12}$$

wenn man noch die durch

$$\mathfrak{i} = \lambda \mathfrak{E} \tag{13a}$$

bestimmte Leitfähigkeit der scheinbaren Substanz einführt, in der man sich, Äther und Kerne kollektiv zusammenfassend, die elektrische Strömung stattfindend denkt. Entsprechend ist

$$\mathfrak{d} = \varepsilon \mathfrak{E}_0. \tag{13b}$$

Die Konstante $c$ erscheint hierbei wie eine Übertragungskonstante der Geschwindigkeit zwischen dem Äther und den Kernsystemen, ebenso wie $\varepsilon$ und $\mu$ die Übertragung der Verdichtung und Verwindung bestimmen.

Die gesamte elektromagnetische Energie wird mit Rücksicht auf (10) und (11)

$$\frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2+\mu\mathfrak{M}^2)dk. \qquad (14)$$

Sind nämlich die Vorgänge nicht rein elektrostatisch, so tritt kinetische Energie des Äthers und dadurch der singulären Stellen in ihm auf, im Volumelement $dk$ der Betrag

$$\frac{1}{2c^2}\mathfrak{A}'^2dk, \qquad (15a)$$

der außer der magnetischen zur elektrostatischen Energie (9)

$$\frac{1}{8\pi}\varepsilon\mathfrak{E}_0^2dk \qquad (15b)$$

hinzutreten muß, um die gesamte elektrische Energie zu liefern. Zwar fordern diese Gleichungen auch noch das Auftreten des Energiebetrags

$$\frac{\varepsilon}{4\pi c}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathfrak{A}_x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathfrak{A}_y'+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathfrak{A}_z'\right)dk, \qquad (15c)$$

doch ist dieser Null, weil dauernd $\operatorname{div}\mathfrak{A}=0$ ist. —

Offen bleibt, ob es auch singuläre Stellen, Magnetokerne, gibt, in denen von Natur der rot $\mathfrak{A}$ einen vorgeschriebenen Wert hat, ebenso wie es zweckmäßig sein kann, Stellen einzuführen, in denen von Natur Unterschiede des Potentials $\varphi$ in unveränderlichem Betrage aufrecht erhalten werden. —

Die Äthertheorie liefert also die Ausgangspunkte sowohl zur Lorentzschen wie zur Maxwellschen Auffassung der Elektrik, zur letzteren, indem sie den Durchschnittszustand der Kerngruppen als scheinbarer Substanzen gleichsam in einer Überschlagsdarstellung erfaßt.

Die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ aber stehen sich nicht dualistisch gegenüber, sie erscheinen jetzt als zwei Seiten ein und desselben Vorgangs: Die Transversalwelle, die den Gleichungen (1) zufolge den Äther durchzieht, bedingt gleichzeitig Relativverschiebungen $\mathfrak{E}$ und Verwindungen $\mathfrak{M}$ in jedem Volumteil, den sie erreicht, — und im Felde eines elektrischen Stromes bestehen Ätherverschiebungen, die wegen ihrer Abnahme nach außen zugleich Verwindungen bedingen.

---

Das Ergebnis der vorstehenden Darlegungen läßt sich dahin zusammenfassen: Die folgestreng durchgeführte Äthertheorie ist eine gesicherte Grundlage für mikrophysikalische Theorien, da sie die Erscheinungen der Fernewirkungen und der Mechanik zutreffend zu beschreiben vermag. Sie entwickelt in dem Ätherkontinuum mit seiner vollkommenen Ordnung stetiger Vektorfunktionen einen Kollektivatomismus, indem sie auf dem mathematisch reinsten Atombegriff, dem des singulären Punktes jener Funktionen, eine vollkommene Unordnung aufbaut, die zu scheinbaren Substanzen und Vorgängen von scheinbarer Stetigkeit führt. Auf die Anschauungsmittel der Kinematik des Kontinuums werden die elektromagnetischen Vorgänge und damit die Strahlung zurückgeführt.

(Eingegangen 13. August 1917.)

# ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

## Über Röntgenspektroskopie.

Von Ernst Wagner.

(Fortsetzung.)

### Theorie der Röntgenspektren.

§ 1. Die Moseleysche Darstellung der Serienfrequenzen nach der Bohrschen Spektraltheorie.

Nach den großen Erfolgen, die Bohr mit seinem Atommodell bei der Erklärung der Serienspektren vom Wasserstoff und Helium erzielt hat (vgl. den zusammenfassenden Bericht von E. Riecke, diese Zeitschr. 16, 222, 1915), hat sich auch die Theorie der Röntgenspektren ganz an die Bohrschen Quantenvorstellungen angeschlossen.

Das Rutherford-Bohrsche Atom gleicht, wie bekannt, einem Planetensystem mit einem Zentralkörper. Dieser, der positiv geladene Kern, enthält die wesentliche Masse (Atomgewicht); er ist sehr wenig ausgedehnt im Vergleich zu den Bahndimensionen, in denen die konstitutionellen Elektronen kreisen. Der wachsende Aufbau der Atome ist nach v. d. Broek[1]) gegeben durch den Zuwachs der Kernladung um je eine positive Elementarladung und den Eintritt jeweils eines neuen Elektrons, so daß die Gesamtladung

1) v. d. Broek, diese Zeitschr. 14, 32, 1913.

des Atoms null bleibt. $H$ soll eins, $He$ zwei ... usw., $Ur$ 92 Elektronen bzw. Kernladungen enthalten entsprechend der Ordnungszahl $N$ des Elementes im periodischen System. Mit wachsender Kernladung bilden sich vom Kern nach außen immer neue mit Elektronen besetzte Ringe allmählich voll aus, derart, daß die zuerst gebildeten inneren Ringe dabei unverändert[1]) bleiben. Dieser periodischen Neuausbildung von Elektronenringen an den äußeren Teilen des Atoms entspricht das periodische Verhalten der physikalisch-chemischen Eigenschaften der Elemente, da und insoweit diese von der Oberflächenwirkung der Atome stammen. Diejenigen physikalischen Äußerungen dagegen, die von den innersten unverändert bleibenden Ringanordnungen beherrscht werden, werden eine, wie vorauszusehen, einfache, nicht periodische Funktion der Kernladung sein müssen.

Dies letztere Verhalten zeigen nun genau nach den Moseleyschen Messungen die Quadratwurzeln der Röntgenfrequenzen $\sqrt{\nu}$ der Elemente, die immer um den gleichen Betrag sprunghaft wachsen, wenn man von einem Element zum nächsten übergeht: hier offenbart sich schlagend der sprunghafte Zuwachs der Kernladung um immer den gleichen Wert der Elektronenladung. So liefern die Moseleyschen Messungen eine unmittelbare Bestätigung der v. d. Broekschen Hypothese und lassen uns den Entstehungsort der Röntgenfrequenzen in den innersten Ringanordnungen des Atoms suchen.

Soweit führen qualitative Betrachtungen. Die Bohrsche Spektraltheorie lieferte vor allem überraschende quantitative Beziehungen, die sehr genau vom Experiment bestätigt wurden. Wir erörtern in Kürze ihre Grundlagen und prüfen ihre Anwendbarkeit auf die Röntgenspektren.

Bohr geht vom $H$-Atom aus. Hier kreist ein einziges Elektron um den einfach geladenen Kern. Die Multiplizität der Serienlinien wird ermöglicht durch die Annahme einer Schar statischer Kreisbahnen, in denen das Elektron, strahlungsfrei und darum stabil, im übrigen nach dem Coulombschen Gesetz verläuft. Die Schar diskreter Bahnen definiert folgender Quantenansatz (für unbeweglichen Kern):

$$\mu \omega r^2 = n \cdot \frac{h}{2\pi}. \qquad (I)$$

$\omega$ = Winkelgeschwindigkeit,
$r$ = Bahnhalbmesser,
$\mu$ = Elektronenmasse,
$h = 6{,}5 \cdot 10^{-27}$ (Plancksche Konstante),
$n = 1, 2, 3 \ldots$.

Ausstrahlung von der Frequenz $\nu$ soll nur erfolgen, wenn durch äußere Störung das Elektron von irgendeiner $m$ten Bahn größerer Energie in irgendeine $n$te Bahn kleinerer Energie überspringt. Die Energiedifferenz $W_m - W_n$ des kreisenden Elektrons in diesen Bahnen soll die Frequenz nach der Planckschen Gleichung regulieren:

$$W_m - W_n = h \cdot \nu_{m,n}. \qquad (II)$$

Nimmt man die Kernladung bei schwereren Atomen als die $N$-fache der Elementarladung $e$ an, so folgt unter Vernachlässigung der $(N-1)$ Elektronen für diesen „Fall der Wasserstoffähnlichkeit" aus (I) und (II) nach Bohr:

$$\nu = \nu_0 \cdot N^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \qquad (1)$$

Hier bedeutet

$$\nu_0 = \frac{2\pi^2 \cdot e^4 \cdot \mu}{h^3} = 109740 \text{ cm}^{-1}$$

die Rydbergsche Fundamentalfrequenz.

$e$ = Elementarladung.

Die Gleichung (1) liefert gerade die Moseleysche Beziehung (2) und (3) in richtigen absoluten Werten zwischen den Röntgenfrequenzen der Hauptlinien $K_\alpha$ und $L_\alpha$ der $K$- und $L$-Serie und der Ordnungszahl $N$ der Elemente, wenn man die einfachsten Quantenzahlen wählt:

$$\nu_{K\alpha} = \nu_0 \cdot (N-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right). \qquad (2)$$

$$\nu_{L\alpha} = \nu_0 \cdot (N-7{,}4)^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right). \qquad (3)$$

Gemäß den Quantenzahlen kommt die $K_\alpha$-Frequenz durch den Übergang des Elektrons von der zweiten zur ersten Bahn, die $L_\alpha$-Frequenz von der dritten zur zweiten Bahn zustande. Statt der wirklichen Kernladung $N \cdot e$ tritt eine verminderte „wirksame" Kernladung $(N-b) \cdot e$ auf, die nach Moseley von dem in der Bohrschen Theorie nicht berücksichtigten Einfluß derjenigen Elektronen herrührt, die im Atominnern auf Ringen nahe dem Kern umlaufen und dessen Ladung teilweise abschirmen. Moseley denkt sich mehrere Elektronen in den Bohrschen Stabilitätsbahnen umlaufend und läßt die ganze Ringanordnung beim Strahlungsvorgang springen. Die Rechnung (vgl. Riecke l.c.) ergibt dann wieder die Bohrsche Frequenzgleichung (1), in der die Kernladung $(N-\sigma) \cdot e$ statt $N \cdot e$ auftritt. Aus $\sigma = 1$ schließt Moseley auf vier Elektronen im $K$-Ring der Atome.

[1]) Unverändert bezüglich der Zahl der sie besetzenden Elektronen, nicht bezüglich der Durchmesser und Energien der Ringe.

§ 2. Beziehungen zwischen den Frequenzen verschiedener Serien (Kombinationsprinzip). Die Dublett-Struktur der $L$-Serie.

Auf empirischer Grundlage haben sich Beziehungen zwischen den beobachteten Frequenzen verschiedener Serien beim gleichen Element ergeben, die als die Additionssätze der Frequenzen bezeichnet werden und nach Bohr dem Kombinationsprinzip der Serien von Ritz entsprechen.

Verf.[1]) hat, ohne Heranziehung spezieller Modellvorstellungen, in Verfolgung der Einsteinschen[2]) Quantenerklärung der Stokesschen Fluoreszenzregel eine Beziehung zwischen der Frequenz der Absorptionsbandkante der $K$-Serie und den Frequenzen der Hauptemissionen der verschiedenen Serien angegeben. Nach Einstein sind die Energiequanten $\varepsilon$ der Strahlung, die beim Fluoreszenzvorgang ins Spiel kommen, proportional ihrer Frequenz: $\varepsilon = h \cdot \nu$. Das Absorptionsquantum $\varepsilon_A$ muß als der primäre Vorgang größer sein als das Emissionsquantum $\varepsilon_i$; also muß gelten:

$$\nu_A > \nu_i$$

in Übereinstimmung mit dem Stokesschen Gesetz.

Wenden wir dies auf die Frequenz der Absorptionsbandkante der $K$-Serie an, indem wir — wie stets im folgenden — die Frequenz (d. i. die Wellenzahl) $\frac{1}{\lambda_{K_A}}$ kurz mit $K_A$ bezeichnen und die Emission durch die stärkste Linie der $K$-Serie approximieren, deren Frequenz wir $K_\alpha = \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}}$ schreiben, so besteht die Ungleichung in Übereinstimmung mit den Messungen:

$$K_A > K_\alpha .$$

Nach den Messungen gehen ca. 90 Proz. des Absorptionsquantums in das Emissionsquantum derselben Serie über. Fragt man nun, welche Frequenz $X$ kann aus dem nicht in Emissionsenergie verausgabten Rest $K_A - K_\alpha$ quantengemäß noch emittiert werden, so folgt: $X$ nahe gleich $L_\alpha$, der Frequenz der Hauptlinie der nächst weicheren Serie. Wir haben also angenähert folgenden Additionssatz der Frequenzen:

$$K_A = K_\alpha + L_\alpha . \qquad (4)$$

Dieser Satz ist im Falle, daß noch weichere Serien existieren, wie unterdessen festgestellt wurde, sinngemäß wie folgt zu einer Reihe mit rasch abnehmenden Beträgen zu erweitern:

$$K_A = K_\alpha + L_\alpha + M_\alpha + \ldots . \qquad (5)$$

1) Sitz.-Ber. bayr. Ak. d. Wiss. S. 338, 1914.
2) Ann. d. Phys. **17**, 132, 1905.

Satz (4) wird erfahrungsgemäß um so besser bestätigt, je kleiner $N$, d. h. je einfacher der Atombau ist. Dies ist in Übereinstimmung mit der Vorstellung vom wachsenden Ringaufbau der Atome, wonach mit wachsendem $N$ immer neue Ringe $M, N \ldots$ ins Spiel kommen. Eine exakte Prüfung der ungeschlossenen Beziehung (5) ist offenbar nicht möglich.

W. Kossel[1]) gelang es auf Grund des Bohrschen Modells insbesondere der Gleichung II, ein Schema für Additionssätze aufzustellen zwischen den Frequenzen der verschiedenen Serien, von denen einige sich gut bewährt haben, andere freilich kaum angenähert gelten.

Der Vorgang der Fluoreszenz im Bohrschen Atom gewinnt nach ihm folgende anschauliche Beschreibung: Wir bezeichnen (im Sinne Moseleys) vom Kern nach außen gehend den 1, 2, 3 ... mit Elektronen besetzten Bohrschen Ring als den $K$, $L$, $M$...-Ring (vgl. Fig. 22.) Ein Absorptionsakt im $K$-Ring bedeutet die Entfernung eines Elektrons aus dem $K$-Ring an die Atomoberfläche. Die hierbei zu leistende Arbeit ist nach der Quantenbedingung II proportional der Frequenz $K_A$ der Absorptionsbandkante zu setzen, wenn das Elektron mit der Geschwindigkeit Null die Oberfläche erreicht. Wird das im $K$-Ring fehlende Elektron durch eines aus dem nächsten, d. i. dem $L$-Ring, ersetzt, so wird die $K_\alpha$-Frequenz emittiert, entsprechend der Energiedifferenz des Elektrons in beiden Bahnen. Wird das jetzt im $L$-Ring fehlende Elektron aus dem $M$-Ring ersetzt, so entsteht die $L_\alpha$-Linie in entsprechender Weise usw. So wird die in einem Zug am $K$-Ring verausgabte Absorptionsenergie sukzessive in den einzelnen Emissionsakten der aufeinanderfolgenden Serien in immer kleineren Beträgen restlos wieder zurückerstattet[2]); dies liefert folgende (auf II fußende) Energie- bzw. Frequenzbilanz:

$$K_A = K_\alpha + L_\alpha + M_\alpha + \ldots \qquad (5)$$

in Übereinstimmung mit (5). Wir bemerken nebenher, daß die $K$-Absorption den Zustand einer $L$-Absorption zur Folge hat, d. i. der Moment, wo das fehlende $K$-Elektron soeben aus dem $L$-Ring ersetzt ist. Eine $K$-Emission hat also eine $L$-, $M$- usw. Emission zur unmittelbaren Folge. — Analog zu (5) folgt für eine reine $L$-Absorption:

$$L_A = L_\alpha + M_\alpha + N_\alpha + \ldots \qquad (6)$$

Aus (6) und (5) gewinnen wir die geschlossene prüfbare Beziehung:

1) W. Kossel, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 953, 1914.
2) C. G. Barkla teilt (Nature **95**, 7, 1915) ganz ähnliche Betrachtungen mit wie die Kosselschen, ohne sich des Bohrschen Modells zu bedienen und ohne bestimmte Frequenzbeziehungen zu gewinnen.

$$K_A = L_A + K_\alpha \,. \qquad (7)$$

Kossel betrachtet speziell den Fall eines Überganges des Elektrons aus dem dritten Ring direkt in den ersten und fragt, ob dieser Energiestufe eine berechenbare Frequenz entspricht, die wirklich in der $K$-Serie beobachtet wird?

Nach II folgt sogleich für eine solche Frequenz $K_x$ die Summe der Frequenzen in den einzelnen Zwischenstufen: $K_\alpha + L_\alpha = K_x$ .

Tatsächlich stellt $K_\beta$ in guter Annäherung diese Frequenz dar:

$$K_\beta = K_\alpha + L_\alpha \,, \qquad (8)$$

wie folgende Tabelle an einigen Beispielen lehrt.

Tabelle IX.

| $N$ | Element | $K_\alpha$ | $L_\alpha$ | $K_{\beta\,\text{ber.}}$ | $K_{\beta\,\text{beob.}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | $Zn$ | 69,8 | 8,1 | 77,9 | 77,3 |
| 41 | $Nb$ | 133,5 | 17,5 | 151,0 | 150,0 |
| 46 | $Pd$ | 170,5 | 23,0 | 193,5 | 192 |
| 47 | $Ag$ | 178,2 | 24,1 | 202,3 | 198 |
| 58 | $Ce$ | 282,0 | 39,0 | 321,0 | 319,0 |
| 74 | $W$ | 493,0 | 68,1 | 561,1 | 565,0 |

Die Zahlen bedeuten die Frequenzen in willkürlichen Einheiten.

Die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Werte ist zu gut, um als zufällig gelten zu können; vielmehr muß der Ursprung der $\beta$-Linie in der angenommenen Weise gesucht werden. Dennoch besteht eine systematische Unstimmigkeit in dem Sinne, daß die Frequenz beim Übergang zwischen entfernteren Bahnen kleiner ausfällt als die Summe der Frequenzen in den Zwischenstufen.

Analog wäre der Ursprung der $K$-$\gamma$-Frequenz in dem Übergang des Elektrons vom vierten[1]) ($N$)-Ring zum $K$-Ring zu suchen:

$$K_\gamma = K_\alpha + L_\alpha + M_\alpha = K_\beta + M_\alpha \,. \qquad (9)$$

Zusammenfassend können wir über die Struktur der Serien, speziell der $K$-Serie, sagen, daß sie, ganz dem Kossel-Bohrschen Schema entsprechend, sich als eine nach der kurzwelligen Seite hin sich häufende Liniengruppe $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ darstellt, deren Grenze (nahe bei $\gamma$) die Absorptionsbandkante bildet.

Die Entstehung der verschiedenen $K$-Frequenzen als Folgeerscheinung des einzigen $K$-Absorptionsaktes liefert ein sehr befriedigendes Bild des Fluoreszenzvorganges unter Wahrung der Stokesschen Regel und ist in bester Übereinstimmung mit den oben erörterten Versuchsergebnissen, daß alle $K$-Serienfrequenzen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ das gleiche Anregungs- bzw. Auslösungspotential $V_K$ haben, das ist jenes Potential, das quantengemäß der Frequenz der Absorptionsbandkante entspricht.

### Die Dublettstruktur der $L$-Serie.

Die $L$-Serie zeigt zwei (aus dem einfachen Bohrschen Modell nicht erklärbare) sich übergreifende, nahe benachbarte Absorptionsgebiete $A_1$ und $A_2$ (vgl. Fig. 17), die ihren Ursprung einem Doppel„ring" $L_1$ und $L_2$ verdanken. Wendet man auf jeden Ring die soeben am $K$-Ring erläuterten Überlegungen an unter Berücksichtigung der von uns gegebenen Linienzuordnung, so erhält man folgende Frequenzgleichungen:

$$L_\gamma - L_\alpha = M_\alpha = K_\gamma - K_\beta \quad \text{für } A_1 \qquad (10)$$
$$L_\delta - L_\beta = M_\alpha \quad \text{für } A_2 \,. \qquad (11)$$

Aus $L_\gamma - L_\alpha$ berechnet man bedeutend (13 Proz.) kleinere Werte als $M_\alpha$; auch finden sich keine anderen passenderen $L$-Frequenzen. Hier versagt das Kombinationsprinzip vollständig, während z. B. den weiteren Additionssatz aus (8) und (10)

$$K_\gamma = K_\alpha + L_\gamma \,,$$

die Erfahrung wiederum gut bestätigt.

Die einfachen Additionssätze gewährleisten daher keineswegs eine gesicherte Serienknüpfung.

Folgende einfache Konsequenz der $L$-Doppelringnatur hat sich dagegen vorzüglich bestätigt:

$$L_{A_2} - L_{A_1} = L_\delta - L_\gamma = L_\beta - L_{\alpha'} = \Delta L. \qquad (12)$$

Entsprechend dem konstanten Energieunterschied beim Übergang des Elektrons von den äußeren $M$, $N$ ... usw. Ringen zum $L_1$- bzw. $L_2$-Ring erscheint hiernach die $L$-Serie als eine Dublettserie mit konstantem Schwingungszahlenunterschied. Diese Konsequenz des Modells bewährt sich in voller Schärfe, wie Wagner und besonders Sommerfeld an dem ausgedehnten Frimanschen Material nachwies. Wir nehmen voraus, daß nach der Sommerfeldschen Feinstrukturtheorie (vgl. unten) der schwache Begleiter $\alpha'$ von $\alpha$ begründeterweise das Dublett bildet.

1) Die Anzahl der Serienlinien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entspricht der Anzahl der außer dem $K$-Ring noch befindlichen Ringe; das gäbe nur vier Ringe selbst bei den schweren Atomen. Möglicherweise bleiben aber schwächere Linien unbeobachtet oder ist $\gamma$ eine noch auflösbare Gruppe. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhange jedenfalls die oben mitgeteilte Tatsache, daß die $K$-$\gamma$-Linie bei Elementen mit $N < 20$ verschwindet und daß bei noch kleinerem $N$ auch $K\beta$ verschwindet. Dies deutet Wagner als Folge des wachsenden Atomaufbaues aus einer zunehmenden Zahl von Elektronenringen. In ähnlicher Weise könnte nach Swinne (diese Zeitschr. 17, 481, 1916) die chemische Bindung eines Elements von kleinem $N$ (z. B. $Na$) einen Einfluß auf die peripheren Ringe ausüben, der sich im Ausbleiben entsprechender Röntgenfrequenzen geltend machen würde.

Nach Sommerfeld findet sich dasselbe Dublett $\Delta L$ noch weitere zweimal an schwächeren Linien in der $L$-Serie wieder:

$$\Delta L = L_\eta - L_\varepsilon = L_\vartheta - L_\zeta ,$$

so daß folgende fünf Dubletts für die Doppelnatur des $L$-Ringes zeugen:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L_{A_2} - L_{A_1} = L_\eta - L_\varepsilon = L_\beta - L_{\alpha'} \\ &= L_\delta - L_\gamma = L_\vartheta - L_\zeta . \end{aligned} \qquad (13)$$

Folgende Tabelle Sommerfelds enthält die betreffenden Werte für $\frac{\Delta L}{\nu_0}$ unter Hinzufügung der Werte $A_2 - A_1$.

Tabelle X.

| | $\Delta L\,\nu_0$ | | | | | | $\Delta A\,\nu_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_2-A_1$ | $\beta-\alpha'$ | $\delta-\gamma$ | $\eta-\varepsilon$ | $\vartheta-\zeta$ | $\varphi-\upsilon$ | $\psi-\chi$ |
| 92 *U* | 282 | 278,4 | 276,5 | | 270,3 | 65,2 | |
| 90 *Th* | | 249,4 | 250,1 | | 245,6 | | |
| 88 *Ra* | | | | | | | |
| 84 *Po* | | | | | | | |
| 83 *Bi* | | 169,0 | 169,9 | 168,7 | 160,5 | 39,8 | 42,4 |
| 82 *Pb* | 160 | 158,8 | 155,4 | 150,3 | | 37,4 | 33,9 |
| 81 *Tl* | | 151,4 | 149,1 | 152,9 | 147,1 | 37,5 | 43,0 |
| 80 *Hg* | | 140,4 | 142,4 | | | | |
| 79 *Au* | 133 | 133,6 | 132,8 | 135,9 | 134,4 | 33,6 | 29,4 |
| 78 *Pt* | 125 | 124,9 | 123,6 | 125,9 | 126,7 | 32,0 | 31,6 |
| 77 *Ir* | | 119,7 | 117,2 | | 119,7 | 25,9 | 40,6 |
| 76 *Os* | | 111,4 | 111,7 | | | 24,3 | |
| 74 *W* | | 97,7 | 98,0 | | | 21,2 | |
| 73 *Ta* | | 92,5 | 91,0 | | | 20,3 | |
| 71 *Cp* | | 81,9 | 78,4 | | | 17,2 | |
| 70 *Ad* | | 76,2 | 74,8 | 79,5 | 101 | 16,4 | |
| 68 *Er* | | 66,7 | 64,7 | | | 10,6 | |
| 67 *Ho* | | 62,2 | 62,8 | | | 12,6 | |
| 66 *Dy* | | 57,6 | 58,1 | | | 12,0 | |
| 65 *Tb* | | 53,9 | 53,5 | | 67 | 11,5 | 14,2 |
| 64 *Gd* | | 49,4 | 48,2 | | 51 | 11,0 | |
| 63 *Eu* | | 46,2 | 44,8 | | 48 | 8,8 | |
| 62 *Sa* | | 43,3 | 44,6 | | | | |
| 60 *Nd* | | 37,3 | 38,5 | | | 7,7 | 8,0 |
| 59 *Pr* | | 34,8 | 35,6 | | | | |
| 58 *Ce* | | 32,2 | 32,1 | | | 7,0 | |
| 57 *La* | | 29,5 | 29,6 | | | 6,0 | |
| 56 *Ba* | | 27,6 | 27,3 | | | 5,4 | |
| 55 *Cs* | | 25,2 | 25,3 | | | 5,1 | |
| 53 *J* | | 21,8 | 21,4 | | | 4,1 | |
| 52 *Te* | | 20,2 | 19,7 | | | 3,7 | |
| 51 *Sb* | | 18,2 | 18,2 | | | 3,2 | |
| 50 *Sn* | | 16,7 | 16,6 | | | 3,1 | 6,5 |
| 49 *In* | | 15,2 | 15,1 | | 18,3 | | |
| 48 *Cd* | | 13,9 | 14,3 | | | 2,5 | |
| 47 *Ag* | | 12,7 | 12,8 | | | 2,3 | |
| 46 *Pd* | | 11,7 | 11,5 | | | 2,3 | |

Die Existenz des Doppelrings $L_1$ und $L_2$ muß ferner zu einem mit dem $L$-Dublett gleich großen Dublett auch in der $K$-Serie Veranlassung geben, sofern sowohl vom $L_1$- wie $L_2$-Ring Elektronenübergänge zum $K$-Ring stattfinden. In der Tat fand W. Kossel[1]) das $L$-Dublett numerisch wieder bei allen untersuchten Elementen in dem Dublett $\alpha\ \alpha'$ der $K$-Serie:

$$\Delta L = K_\alpha - K_{\alpha'} \qquad (14)$$

Charakteristischer- und folgerichtigerweise liegt der schwache Begleiter $K_{\alpha'}$, der dem schwächeren und frequenteren Absorptionsgebiet $A_2$ zuzuordnen ist, nach kleineren Frequenzen hin, während umgekehrt in der $L$-Serie alle $A_2$ zugeordneten schwächeren Linien des Dubletts die höher frequenten sind.

Nach R. Swinne[1]) wiederholt sich dieser Sachverhalt des Wiederauftretens des $L$-Dubletts in der $K$-Serie in dem Wiedererscheinen eines $M$-Dubletts $\Delta M = M_\beta - M_\alpha = M_\delta - M_\gamma$ in dem Dublett $L_\varepsilon - L_{\alpha'}$ der $L$-Serie entsprechend der folgenden Gleichung, die von der Erfahrung[2]) gut bestätigt wird:

$$\Delta M = M_\beta - M_\alpha = M_\delta - M_\gamma = L_\alpha - L_{\alpha'} \qquad (15)$$

($\delta$ und $\gamma$ entsprechen bei Siegbahn $\delta_2$ und $\gamma_2$).

Bemerkenswerterweise entdeckte Sommerfeld in der $L$-Serie noch eine zweite Dublettgruppe mit konstanter Frequenzdifferenz $\Delta A$, für die sich ungefähr ergibt: $\Delta L = 4{,}2\,\Delta A$[3]).

Die $A$-Gruppe ist aus folgenden Frequenzen aufgebaut (vgl. Tabelle X)

$$\Delta A = L_\varphi - L_\upsilon = L_\psi - L_\chi .$$

In Analogie zum $L$-Dublett müssen wir zum $A$-Dublett auch zwei Absorptionsfrequenzen $A_{\mathrm{I}}$ und $A_{\mathrm{II}}$ erwarten, für welche gilt:

$$\Delta A = L_{A\,\mathrm{II}} - L_{A\,\mathrm{I}} = L_\psi - L_\chi = L_\varphi - L_\upsilon . \qquad (16)$$

Wir vermuten, daß $A_{\mathrm{I}}$ nahe mit $A_2$ zusammenfällt und darum nicht beobachtet wird ($A_2 = \vartheta$, $A_{\mathrm{I}} = \chi$), und daß $A_{\mathrm{II}}$ die dritte von Broglie beobachtete Kante ist, die wir oben mit $A_3$ bezeichneten. Dann müßte $A_{\mathrm{II}}$ in der Tat unserer bereits oben geäußerten Erwartung gemäß, mit $\psi$ koinzidieren.

Hiernach scheint regelmäßig die letzte Serienlinie mit ihrer Absorptionsgrenze nahe zusammenzufallen:

$$\begin{aligned} K_\gamma &= K_A \quad & L_\chi &= L_{A\,\mathrm{II}} \\ L_\zeta &= L_{A_1} \quad & L_\psi &= L_{A\,\mathrm{III}} \\ L_\vartheta &= L_{A_2} . \end{aligned}$$

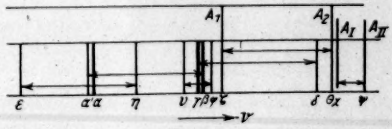



Fig. 21.

1) W. Kossel, Verh. d. D. phys. Ges. **18**, 347, 1916.

1) R. Swinne, diese Zeitschr. **17**, 481, 1916.

2) A. Sommerfeld, Sitz.-Ber. bayr. Ak. S. 145, 1916.

3) Der Faktor 4 bei der zweiquantigen $L$-Serie dürfte wohl eine einfache theoretische Bedeutung haben.

Für Wismut ist die Lage beider Dublettgruppen im Spektrum auf Fig. 21 dargestellt. Beide Gruppen scheinen durch das ganze System der Elemente in dem sehr feinen Dublett $\vartheta, \chi$ miteinander fest verknüpft zu sein.

Sämtliche beobachteten Emissions- und Absorptions-Frequenzen der $L$-Serie sind nach obigem empirisch in den organischen Zusammenhang gebracht, den man auf Grund eines zweifachen Doppel-$L$-Ringes erwarten muß. In der Sommerfeldschen Feinstrukturtheorie (vgl. unten) wird das größere Dublett $\Delta L$ seine überraschende zahlenmäßige Deutung finden, während das kleinere Dublett $\Delta\Lambda$ vorerst noch einer Erklärung harrt.

(Schluß folgt.)

# BESPRECHUNGEN.

**Handbuch der Radiologie.** Herausgegeben von Erich Marx. gr. 8°. Band IV, enthaltend: W. Wien, Kanalstrahlen. A. Hagenbach, Lichtbogen. O. W. Richardson, Glühelektroden, mit einer Ergänzung des Herausgebers. E. Marx, Flammenleitung. XXIII u. 806 S. mit 422 Figuren und Abbildungen im Text. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1917. Geh. M. 48.—, geb. M. 50.—.

Von dem vorliegenden Handbuch sind bis jetzt erschienen Band II (über radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen von Rutherford, Besprechung diese Zeitschrift **15**, 261, 1914) und Band III (enthaltend: Glimmentladung von Gehrcke, Positive Säule von Seeliger und Lichtelektrizität von Hallwachs; Besprechung diese Zeitschrift **17**, 213, 1916). Wie dem Vorwort zu diesem IV. Bande zu entnehmen ist, liegen die Manuskripte zu Band I (Townsend, Ionisation der Gase; Geitel, Radioaktivität der Erde und der Atmosphäre) und auch zu Band V (Bestelmeyer, spezifische Ladung; H. Starke, Absorption und Reflexion der Kathodenstrahlen; E. Marx, Röntgenstrahlen) seit langem bereit und im wesentlichen sogar gesetzt und druckfertig vor. Bedauerlicherweise ist aber das Erscheinen dieser Bände durch die bedeutenden Schwierigkeiten, mit denen zur Zeit solche Verlagsunternehmungen zu kämpfen haben, vorläufig ganz in Frage gestellt. Band I soll erst nach dem Kriege erscheinen. Der Verlag würde sich aber zweifellos gerade jetzt im Kriege mit dem Herausbringen dieser Bände, von denen der erste als theoretisch grundlegender selbstverständlich den Wert der bisher erschienenen erhöhen würde und deren fünfter ebenfalls wichtige Ergänzungen enthält, tatsächlich ein großes Verdienst erwerben, denn wir haben sicher jetzt das größte Interesse daran unsere Wissenschaft — ganz speziell die Physik — auf der Höhe zu halten; und Handbücher wie das vorliegende ersparen dem Forscher Zeit, ein Umstand, dem im Kriege ernste Beachtung geschenkt werden sollte. —

W. Wien behandelt auf etwa 200 Seiten die Kanalstrahlen. Der Abschnitt zeichnet sich, auch in experimenteller Hinsicht, durch eine wohltuende Klarheit der Darstellung aus. Nach einigen einleitenden Kapiteln über die Entstehung der Kanalstrahlen, ihre Beobachtung durch Lichtwirkungen, sowie ihre thermischen, chemischen, ionisierenden und zerstäubenden Erscheinungen werden die Sekundärstrahlen, die lichtelektrischen Kanalstrahlen, und etwas ausführlicher die magnetischen und elektrischen Ablenkungen der Kanalstrahlen behandelt. Dann folgen: Umladung der Strahlen, ihre Theorie, Abhängigkeit vom ruhenden Gase, Absorption und Zerstreuung, Theorie der Kanalstrahlen, Lichtemission, Dopplereffekt, Absolutbetrag der Lichtemission, Erregung des Leuchtens, Geschwindigkeitsabhängigkeit der Lichtemission, elektrische und magnetische Einwirkung auf die Lichtemission, Polarisation und Reflexion und schließlich positive Strahlen an der Anode, sowie elektrische und elektrodynamische Einwirkung auf Spektrallinien. Die Darstellung hat den Vorzug, daß der Autor samt seiner Schule aufs engste mit dem Stoff verwachsen ist und den Gegenstand gewissermaßen als persönliches Erlebnis behandeln kann — daher die Übersichtlichkeit und Betonung der springenden Punkte! Mehr im Sinne eines Handbuches hätte es aber gelegen, die Literatur etwas vollständiger anzugeben. Hinweise auf anderezusammenfassende Bearbeitungen würden manchem Leser von Vorteil sein. Es sei hier nur erinnert an die zahlreichen längeren Publikationen im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Zum Beispiel hätte man bei dem kleinen Abschnitt über Zerstäubung durch Kanalstrahlen hinweisen können auf das 1912 erschienene 40 Seiten starke Referat über diesen Gegenstand von Kohlschütter, ferner bei den Untersuchungen von Dechend und Hammer auf deren 1911 im gleichen Jahrbuch publizierte Arbeit über die Kanalstrahlen im elektrischen und magnetischen Felde, ganz zu schweigen von anderen umfangreichen hier interessierenden Aufsätzen (vgl. z. B. Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **3**, 291, 1906 und **4**, 78, 1907: Stand der Forschung über die positiven Strahlen (Kanal- und $\alpha$-Strahlen, von P. Ewers) und insbesondere den zahlreichen Spektralarbeiten von J. Stark, von denen fast nur die in den Annalen publizierten erwähnt werden. In dieser Hinsicht vorbildlich ist die Lichtelektrizität von Hallwachs im III. Bande. Hätte sich nicht das gleiche System einer übersichtlichen Literaturzusammenstellung bei allen Abteilungen erreichen lassen?

Die Arbeit von Hagenbach über den Lichtbogen (S. 291—435) ist trotz mehrfacher zusammenfassender Bearbeitung des Gegenstandes namentlich deshalb willkommen, weil sie vom Standpunkte des Physikers einen Überblick gibt über ein Gebiet, das in besonderer Weise mit der Technik und Industrie verwachsen ist und doch eine Fülle von Problemen bietet, deren experimentelle wie theoretische Verfolgung in verschiedenster physikalischer Hinsicht erwünscht und aussichtsreich erscheint. — Nach einer historischen Einleitung (Hinweis auf zusammenfassende Darstellungen) gliedert sich das Ganze in die Abschnitte über elektrische, thermische, Strahlungs- und chemische Vorgänge im Lichtbogen. Zunächst wird der Gleichstrombogen behandelt, seine Charakteristiken für Kohle- und Metallelektroden. Eine große Rolle spielt natür-

lich die Ayrtonsche Gleichung. Kapitel II über „Andere Formen des Bogens und Einfluß des Druckes der umgebenden Atmosphäre" bringt unter anderem die von Hagenbach studierten merkwürdigen Bogenformen am Kupferbogen (Fortsetzung dieser Arbeiten für Nickelelektroden siehe W. Frey, Ann. **49**, 1916, erwähnt im Nachtrag.) Kapitel III wendet sich dem Stabilitätsproblem des Bogens zu: Untersuchung von Kaufmann, H. Th. Simon (allerdings sind die Referate der Simonschen Arbeiten nicht besonders gut), Existenzbedingungen der verschiedenen Bogenformen, Betrachtung neuerer Experimente von diesem Gesichtspunkt aus. Dann folgt: Anoden- und Kathodenfall im Bogen, u. a. Sondenmessungen im Metalllichtbogen, Messungen an Metalloxyden. Dem Quecksilberbogen ist selbstverständlich besondere Behandlung zuteil geworden. Temperatureinfluß auf die Charakteristiken, Kathoden- und Anodenfall bei Kohle- und Metallelektroden bilden den Inhalt des V. Kapitels, während das folgende der Ionentheorie des Bogens gewidmet ist. Dann folgen: Transport der Materie im Bogen und elektromotorische Gegenkräfte. Arbeiten von J. Duddell werden diskutiert — Ionentheorie von Anoden- und Kathodenfall.

Die Behandlung des Wechselstrombogens bringt unter anderem die Simonsche Bogentheorie: statische und dynamische Charakteristik, Lichtbogenhysteresis, ferner experimentelle Arbeiten über Wiederzündungszeiten, Diskussion der Simonschen Gleichung des Wechselstrombogens — Einfluß des umgebenden Gases, Hysteresis bei verschiedenen Metallen. Es liegt hier eine große Anzahl von Problemen vor und man befindet sich hier gerade in dem Stadium der Auflösung recht komplizierter Vorgänge in definierten physikalischen Einzelaufgaben. — Kapitel X bringt den Fall ungleicher Elektroden, Gleichrichterwirkung. Sodann: der tönende Lichtbogen — die bekannten Arbeiten von H. Th. Simon und seinen Schülern — Schwingungen erster, zweiter, dritter Art. Von Interesse sind auch die den thermischen Problemen gewidmeten Abschnitte. Auch die Strahlung des Bogens wird ausführlich behandelt. Zum Schluß gibt Hagenbach noch einen Nachtrag (März 1916), in dem auch die Arbeiten von Rukop und Zenneck, Grotrian und die „flüssige Kohle" von Lummer besprochen sind. —

Besondere Beachtung verdient der Artikel über Glühelektroden von Richardson (etwa 150 Seiten). Bei der im Laufe der letzten Jahre stattgehabten regen Forschung — und Diskussion — auf diesem für die Theorie der Materie so überaus wichtigen Gebiete ist eine Darstellung von so berufener Seite sehr willkommen. Die Stoffeinteilung ist folgende: I. Allgemeiner Charakter der Phänomene, II. Emission negativer Ionen durch heiße Körper, die kinetische Energie der emittierten Elektronen; theoretische Betrachtungen, III. Die durch Metalle hervorgerufene positive Ionisation, IV. Ionisation durch heiße Salze. Es folgt ein von Herrn Marx verfaßter Ergänzungsabschnitt in den neueren Versuchen über Elektronenemission heißer Körper. Es kann hier nicht näher auf diesen wertvollen Beitrag eingegangen werden. In gewissem Sinne ist die Abhandlung in Parallele zu stellen mit dem Artikel von Hallwachs über die Lichtelektrizität (Band III). Hier wie dort hat sich die Forschung hindurchgearbeitet durch eine Fülle von Erscheinungen, die den wahren Effekt verschleierten, die eine erbitterte Forschung für und wider zeitigten und schließlich doch dem Instinkt des Entdeckers recht gaben: Lichtelektrische Elektronen an „sauberen" Oberflächen in einem Falle[1]) — rein thermisch emittierte Elektronen im anderen. Es sei hier speziell verwiesen auf S. 591. Der Richardsoneffekt im extremen (Lilienfeldschen!) Vakuum besteht zu Recht. Doch ist nicht zu vergessen, daß auch die Arbeiten (Fredenhagen), die das Gegenteil beweisen sollten, trotz der Widerlegung, die sie erfuhren, wesentlich beigetragen haben zur Vertiefung der Kenntnis des ganzen Gebiets. Bezüglich des ergänzenden Nachtrags sei auch auf die hier zur Sprache gebrachten Probleme der „positiven Elektronen" (Lilienfeld) hingewiesen, sowie auf die glänzende Untersuchung von Germershausen über den Richardsoneffekt an der *CaO*-Elektrode.

Die Lektüre dieses Richardsonschen Beitrages muß Interessenten warm empfohlen werden. —

Den Schluß des vorliegenden Bandes (Seite 603 bis 782) bildet die von Marx geschriebene „Flammenleitung". Ich darf mich hier auf den Hinweis beschränken, daß es sich hier um die hochinteressante und wertvolle Bearbeitung eines Gebietes handelt, um das der Verfasser grundlegende Verdienste hat. Auch sei aufmerksam gemacht auf die neue Arbeit von Marx über die lichtelektrische Theorie der Flammenleitung (Ann. **50**). —

Möge es Herrn Marx gelingen, die noch fehlenden Bände recht bald herauszubringen! H. Hörig.

[1]) Allerdings sind hierüber die Ansichten noch geteilt.

**Prace matematyczno-fizyczne T. XXV. Warszawa 1913.** (Mathematisch-physikalische Abhandlungen Bd. XXV. Warschau 1913.) Witkowski-Festschrift II. Teil.

Der erste Teil dieser Festschrift, welcher neun Abhandlungen umfaßte, ist seinerzeit in dieser Zeitschr. **14**, 909, 1913, besprochen worden. Der damals schon angekündigte II. Teil, dessen Drucklegung infolge der Kriegsereignisse verzögert wurde, erschien erst im Jahre 1915. Er bringt 7 Abhandlungen verschiedenen Inhalts.

Jan Danyer † (im Kriege gefallen) berichtet über seine experimentellen Studien der $\beta$-Strahlen radioaktiver Elemente der *Ra*-Reihe. Die Resultate dieser wichtigen Untersuchung magnetischer Spektren der $\beta$-Strahlen sind den deutschen Fachgenossen aus früheren Publikationen des Verfassers (C. R. **153** (1911), **154** (1912); Le Radium **9** (1912), **10** (1913); Journ. de Phys. **3** (1913)) und aus dem Berichte von O. v. Baeyer im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik (**11**, 66, 1915) genügend bekannt.

Mit dem Problem der Ionisation und Absorption der Rückstoßatome in Gasen beschäftigt sich L. Wertenstein (Warschau) in der Abhandlung „Über den radioaktiven Rückstoß". Der wichtigste Teil der vom Verfasser erzielten experimentellen Forschungsergebnisse auf diesem Gebiete ist seinen früheren Publikationen (seit 1910 im Le Radium) entnommen. Sie führen zum Schluß, daß die Rückstoßatome sich in bezug auf Ionisation und Absorption ähnlich wie $\alpha$-Teilchen verhalten und dieselben physikalischen Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen. Die beobachteten Unterschiede können auf größere Masse und kleinere Geschwindigkeiten der Rückstoßatome zurückgeführt werden.

M. Wolfke (Zürich) gibt in der Abhandlung „Über die Entstehung der optischen Bilder im Mikroskop" eine kurze zusammenfassende Darstellung der grundlegenden Abbeschen Lehre von der Bildentstehung samt den vom Verfasser hinzugefügten Beiträgen. Die letzteren sind dem deutschen Leserkreise aus den Ann. d. Phys. **34** (1911), **37** (1912), **38** (1912), **39** (1912), **40** (1913) bekannt.

In einer längeren (50 S.) Monographie behandelt Jan Kroo (Krakau) „die Prinzipien der statistischen Mechanik". Die systematisch geordnete Darstellung umfaßt in sechs Abschnitten folgenden Inhalt: In der Einleitung wird die Aufgabe der statistischen Mechanik kurz besprochen und eine Übersicht über den zu behandelnden Stoff geboten. Im ersten Abschnitt (betitelt „Die Gesamtheiten der statistischen Mechanik") werden die dynamischen Voraussetzungen und die Grundbegriffe der statistischen Phasengesamtheit, der virtuellen Gesamtheit und des statistischen Gleichgewichts erörtert. Weiter folgen die Abschnitte: Über die Zeitgesamtheit (II), Über die Methode der mikrokanonischen Gesamtheiten (III), Die kanonischen Gesamtheiten (IV), Molekulare Systeme (V), Nichtstationäre Gesamtheiten (VI). Die Abhandlung soll zur Einführung in das Studium des Gegenstandes dienen, kann jedoch wegen gedrängter Darstellungsweise nur von gut vorbereiteten Lesern mit Vorteil benutzt werden.

Der Inhalt der nächstfolgenden Abhandlung von St. Loria (Krakau): Über Refraktion und Dispersion des Lichtes in Gasen ist im wesentlichen in der Monographie des Verfassers „Lichtbrechung in Gasen als physikalisches und chemisches Problem" (Sammlung Vieweg Heft 4) enthalten.

Witold Rybczyński (Lemberg) befaßt sich mit den Theorien der Entstehung der Röntgenstrahlen. Die Abhandlung ist im August 1913 geschrieben worden und spiegelt demnach den damaligen Stand des Problems ab.

Nahezu den vierten Teil des ganzen Bandes umfaßt die Monographie von M. Smoluchowski (Krakau) „Über thermodynamische Fluktuationen und Brownsche Bewegungen". Der Verfasser gibt eine systematisch geordnete Darstellung der Resultate seiner seit dem Jahre 1904 konsequent geführten theoretischen Untersuchungen und ergänzt diese Ausführungen durch einen Vergleich der theoretischen Formeln mit den von verschiedenen Beobachtern gesammelten Ergebnissen experimenteller Forschung. Einen Begriff von dem Inhalt gewinnt man aus der Zusammenstellung der Überschriften der einzelnen Abschnitte: I. Dichteschwankungen. II. Brownsche Bewegungen. III. Verteilung der Teilchen einer Emulsion im Gravitationsfelde. IV. Allgemeine Theorie der Fluktuationen um die Gleichgewichtslage. V. Allgemeine Theorie der Brownschen Bewegungen (Veränderlichkeit der Fluktuationen). VI. Die Gültigkeitsgrenzen der thermodynamischen Grundsätze. Die Monographie eignet sich vorzüglich zur Einführung in diesen modernen Zweig der kinetischen Theorie und beleuchtet in sehr interessanter Weise das Verhältnis der Atomistik zur Thermodynamik. Heute, nachdem der Verfasser durch allzufrühen Tod, in den besten Mannesjahren der Wissenschaft entrissen worden ist († am 5. IX. 1917), wird diese Abhandlung als letztes Autoreferat seiner überaus erfolgreichen Lebensarbeit besonders wichtig bleiben. Sie wird auch sicher jedem Forscher, der die letzten Errungenschaften der theoretischen Atomistik kennen lernen will, als zuverlässiger und anregender Wegweiser unentbehrlich sein. St. Loria.

**W. K. Clifford, Der Sinn der exakten Wissenschaft, in gemeinverständlicher Form dargestellt.** Deutsche Übersetzung nach der vierten Auflage des englischen Originals von Dr. H. Kleinpeter. VIII u. 282 S. mit 100 Fig. Leipzig, J. A. Barth. 1913. Geh. M. 6.—, geb. M. 6.75.

Der Inhalt des Buches geht am besten aus seinem früheren Titel hervor, der lautet: „Die ersten Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, erörtert in einer dem Nichtmathematiker verständlichen Weise". Das Buch ist nicht ohne Nutzen für den Mathematiker an Mittelschulen. Für den Physiker haben nur die letzten Abschnitte beschränktes Interesse. Der Titel der vorliegenden deutschen Übersetzung — eine Übertragung des englischen Titels: „The Common Sense of Exact Sciences", — muß als irreführend bezeichnet werden! Karl Bergwitz.

**Hermann v. Helmholtz, Zwei Vorträge über Goethe.** 8°. 64 S. Feldausgabe. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn. 1917. M. 0.80.

Die Verlagsbuchhandlung von Vieweg leistet einer Anregung von König Folge, indem sie einige Vorträge von Helmholtz in Einzelheften herausgibt und so dem, in heutiger Zeit gesteigerten Bedürfnis des gebildeten Publikums nach gehaltvoller geistiger Nahrung entgegenkommt. Die Vorträge von Helmholtz wirken mit ihrem Gedankenreichtum und ihrer klaren Sprache nicht nur auf den Naturwissenschaftler anregend, und so ist es dankbar zu begrüßen, daß sie in dieser Form jedem, der Interesse daran hat, leicht zugänglich gemacht werden, so daß er nicht erst in großen wissenschaftlichen Werken oder dicken Sammlungen danach zu suchen braucht. Namentlich unseren Feldgrauen wird ja dieses letztere meist unmöglich sein. Das uns vorliegende Heft enthält den Königsberger Vortrag vom Jahre 1853 über „Goethes naturwissenschaftliche Arbeiten", sowie die im Jahre 1892 in Weimar bei der Versammlung der Goethe-Gesellschaft gehaltene Rede über „Goethes Vorahnung kommender naturwissenschaftlicher Ideen". Diese beiden Reden, deren Inhalt sich so vielfach berührt, wird man ja sonst nicht so leicht zusammen zu lesen bekommen, und es muß als sehr glücklich bezeichnet werden, daß sie hier in einem Heft vereinigt sind. Ein Geleitwort von Walter König eröffnet die Sammlung.
V. Pieck.

## Personalien.

**(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)**

**Habilitiert:** An der Universität Wien Dr. Ernst Philippi und Dr. Ernst Späth für Chemie.

**Ernannt:** Der a. o. Professor an der Universität München Dr. Heinrich Wieland zum ord. Professor der organischen Chemie an der Technischen Hochschule München, der a. o. Professor und Observator der Sternwarte an der Universität Bonn Dr. Karl Mönnichmeyer zum ord. Honorarprofessor für Astronomie ebendaselbst, der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Robert Wenger zum a. o. Professor für Geophysik und Direktor des Geophysikalischen Instituts daselbst.

**Verliehen:** Dem Privatdozenten der Physik an der Universität Halle Dr. Albert Wigand der Titel Professor.

**Gestorben:** Der Mathematiker Hans Strindberg in Helsingfors (ein Sohn des schwedischen Dichters August Strindberg), der frühere Privatdozent für physikalische Chemie an der Universität Berlin Dr. Julius Sand (zu Sonthofen im Allgäu), der Direktor der Farbwerke Kalle in Biebrich Dr. Eugen Fischer.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.